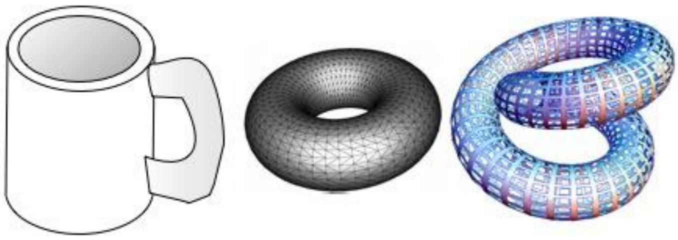
Problema 2:

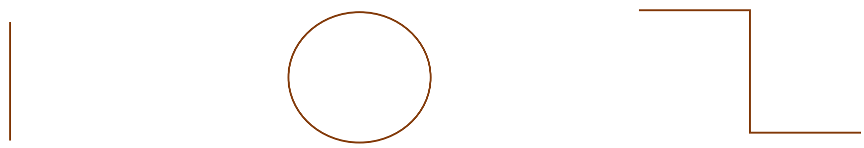
NOTA INICIAL: *Dedicamos este problema a alunos do Ensino Secundário que sintam fascínio pela Matemática.*



A **Topologia** é um belíssimo ramo da Matemática que estuda as propriedades de certos objectos, por exemplo linhas e superfícies, que são preservadas por "deformações contínuas"[1].

Numa linha plana uma deformação é contínua quando resulta de mover, esticar ou contrair a linha, como se fosse um elástico, mas sem permitir que quaisquer dois pontos distintos se toquem e que o "elástico" se rompa (para uma definição mais rigorosa ver Apêndice no final).

Repare o leitor/a nestas três linhas planas (um I, um O e um Z…):



Facilmente reconhece que, se fossem elásticos, conseguia transformar a primeira na terceira, mas nenhuma destas na segunda sem que dois pontos distintos se toquem.

Objectos que resultam um do outro pelas referidas deformações contínuas dizem-se homeomorfos.

Acontece que esta condição, sendo suficiente, não é necessária para que duas linhas planas sejam homeomorfas; as linhas abaixo são homeomorfas mas não é possível transformar uma na outra sem que dois pontos distintos se toquem mantendo a linha no plano.

[1] Se quiser saber alguma coisa sobre as origens da Topologia pode ver **aqui** a resolução do **problema 2** de Julho de 2014.

Contudo, se permitirmos que a linha (pense num “elástico”) seja “levantada” do plano, deformada e depois pousada de novo então a transformação é possível.

Acontece que esta condição já é necessária e suficiente para o homeomorfismo entre linhas planas.

Pois estes são os desafios que lhe propomos hoje:

i) **No conjunto das letras do alfabeto das maiúsculas contar o número máximo de subconjuntos não vazios que se podem formar de forma a que duas letras sejam homeomorfas se e só se pertencerem ao mesmo conjunto;**

ii) **Contar o número máximo de figuras que pode formar com quatro fósforos unidos topo a topo, mas sem se cruzarem ou sobreporem, de forma a que não haja duas homeomorfas;**

iii) **O mesmo com cinco fósforos.**

Apêndice

Um homeomorfismo entre as linhas L_1 e L_2 é uma aplicação $\varphi: L_1 \longrightarrow L_2$ bijectiva e tal que, se $Q = \varphi(P)$, então, quando me desloco, “sem saltos”, a partir de P a minha imagem desloca-se “sem saltos” a partir de Q (o mesmo se deve passar com φ^{-1}).

Repare na figura abaixo:

Se se deslocar sobre um ponto X, “sem saltos”, a partir de P pode fazê-lo seguindo três “caminhos” distintos: num dos deles $\varphi(X)$ deslocar-se-á para a esquerda de Q, noutro para a direita, mas no terceiro, para conservar a bijeção, vai ter de “dar um salto”: as figuras não são homeomorfas.