Nesta coluna pretendo partilhar todos os meses a minha opinião sobre questões relacionadas com a Matemática e com o seu ensino. Os leitores são convidados a comentar, com argumentos a favor ou contra, aliás é esse o objectivo desta coluna: discutir diferentes pontos de vista sobre o tema do artigo (dia 3 de cada mês).

*José Carlos da Silva Pereira – Professor de Matemática, autor de livros escolares e responsável pelo site* Recursos para Matemática. *Ler artigos anteriores* aqui.

## Se e Só Se por José Carlos Pereira

## Artigo de Abril de 2015 – Dia 3

## Clube SPM

# Limites Notáveis

Durante o presente ano lectivo tenho recebido várias mensagens de correio electrónico com a mesma questão. É uma questão que também tem sido alvo de discussão no grupo do Facebook “Recursos para Matemática” e pode ser resumida da seguinte forma:

Só são aceites como limites notáveis os que aparecem no formulário de exame?

Ao que parece surgiram rumores, até ver infundados, uma vez que não há nenhuma informação do IAVE nesse sentido, de que apenas os limites notáveis que constam no formulário do exame seriam aceites, em particular, apenas seriam válidos os limites notáveis $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}$, com $p\in\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ (em relação aos limites notáveis $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$, a sua aplicação não suscita dúvidas).

No seguimento destas mensagens e de toda a discussão sobre este assunto constatei que alguns professores “obrigam” os seus alunos a aplicar apenas e só estes limites notáveis, pois são os que constam no formulário, pensando que só estes serão válidos em contexto de exame. Essa obrigatoriedade pode levar, em muitos casos, a um aumento da dificuldade de resolução de um limite. Por exemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x}\times 2}{x^3}=2\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2^2\right)^x}{x^3}=2\times\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x}{x^3}=2\times\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\ln\left(4^x\right)}}{x^3}=2\times\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln 4}}{x^3}\underset{y=x\ln 4}{=}$$

$$=2\times\lim_{x\to+\infty}\frac{e^y}{\left(\frac{y}{\ln 4}\right)^3}=2\times(\ln 4)^3\times\lim_{x\to+\infty}\frac{e^y}{y^3}=2\times(\ln 4)^3\times(+\infty)=+\infty$$

Não há dúvidas em relação à correcção desta resolução. Se este fosse um exercício de uma qualquer prova de Exame Nacional e se um aluno respondesse desta forma, teria a cotação total. No entanto é uma resolução que utiliza, em minha opinião, uma série de “truques” e “artifícios” absolutamente desnecessários!

Os limites notáveis $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}$, com $p\in\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ são apenas casos particulares dos limites notáveis $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}$, com $a>1$ e $p\in\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}$[i], com $a>1$. Assim, a resolução do limite do anterior poderia ser simplesmente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x}\times 2}{x^3}=2\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2^2\right)^x}{x^3}=2\times\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x}{x^3}=2\times(+\infty)=+\infty$$

Da mesma forma, não é necessário mudar a base do logaritmo presente no seguinte limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_5 x}{x^2+1}$, bastando, para o resolver, fazer:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_5 x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_5 x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_5 x}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0\times\frac{1}{+\infty+\frac{1}{+\infty}}=0\times\frac{1}{+\infty+0}=0\times 0=0$$

Se porventura o IAVE elaborasse os critérios de correcção do Exame Nacional de Matemática A de modo a que só os limites notáveis presentes no formulário fossem aceites, seria somente uma forma artificial de aumentar o grau de dificuldade do exame. De referir que um dos critérios gerais de correcção do exame é "É aceite qualquer processo de resolução, desde que enquadrado pelo programa da disciplina". Assim, os limites notáveis mais gerais podem e devem ser utilizados sempre que se justificar, visto que fazem parte do programa da disciplina de Matemática A.

Para finalizar deixo o link para o meu artigo de Junho de 2014 onde dou alguns conselhos sobre a utilização dos limites notáveis.

Deixe o seu comentário sobre este tema na página do Facebook do Clube SPM.

---

[i] Apesar de no Secundário não ser referido, o limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}$, com $a>1$ e $p>0$ é notável. Também podemos considerar como notáveis os limites $\lim_{u(x)\to+\infty}\frac{a^{u(x)}}{\left(u(x)\right)^p}$, com $a>1$ e $p\in\mathbb{R}$ e $\lim_{u(x)\to+\infty}\frac{\log_a\left(u(x)\right)}{\left(u(x)\right)^p}$, com $a>1$ e $p\in\mathbb{R}^+$.