Ah, os problemas! Lembram-se do prazer que é encontrar um problema, daqueles que nos desafiam logo que o lemos, e depois avançar na resolução até conseguir descobrir a resposta? Recordam-se da alegria que é descobrir a forma elegante e simples que alguém encontrou para resolver um problema que julgámos impossível ou que tanto trabalho nos deu? E, finalmente, concordam que entusiasma discutir com outras pessoas a maneira de chegar à solução de um problema que nos intriga? Pois é por estes três motivos que esta secção existe.

José Paulo Viana – Professor de Matemática na Escola Secundária de Vergílio Ferreira, autor da seção "Desafios" aos domingos no jornal Público

100 Problemas por José Paulo Viana
Artigo de fevereiro de 2015 – Dia 17
Clube de Matemática da SPM

Título: Três Resoluções, três resultados

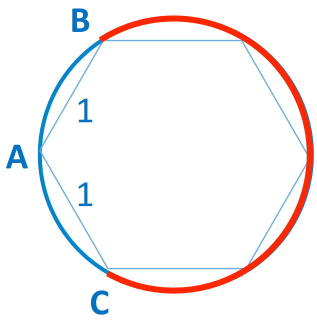
Temos uma circunferência de raio 1. Traçamos uma corda ao acaso.
Qual é a probabilidade de ela ser maior que o raio?

Vamos resolver este problema por vários processos.

1º MÉTODO - Uma corda fica definida se conhecermos os seus extremos.

Por isso, vamos escolher ao acaso dois pontos da circunferência.

Seja, por exemplo, A o primeiro desses pontos.



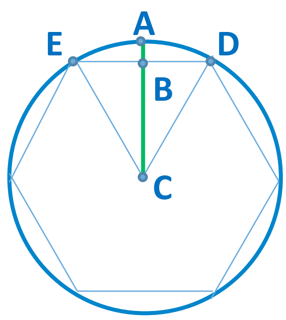
Desenhemos o hexágono regular inscrito na circunferência e em que um dos vértices é A.

Se o segundo ponto, escolhido ao acaso, estiver no arco AB ou no arco AC, o comprimento da corda é menor que 1. Se estiver no arco BC (a vermelho), o comprimento vai ser maior que 1. Então:

$$P(\text{corda maior que o raio}) = 4/6 = 2/3 \approx 0{,}667$$

2º MÉTODO - Uma corda fica definida se conhecermos o raio que lhe é perpendicular e o ponto onde se intersetam.

Escolhemos ao acaso um dos raios da circunferência, por exemplo CA. Como os raios são todos iguais, podemos ver o que se passa apenas neste caso.



Seja B o ponto do raio tal que a corda perpendicular ED defina o triângulo equilátero CED.

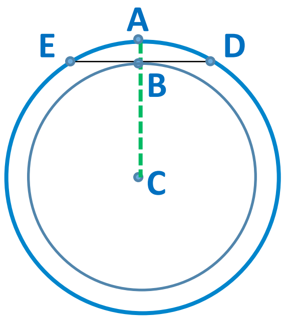
Vamos agora escolher ao acaso o ponto do raio CA que irá definir a corda aleatória. Se o ponto escolhido estiver entre A e B, a corda é menor que o raio. Se estiver entre B e C, a corda será maior.

Todos os pontos do raio CA são igualmente prováveis. O segmento BC mede $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ e AC mede 1. Então

$$\text{P(corda maior que o raio)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \approx 0{,}866$$

3º MÉTODO - Uma corda fica definida pelo seu ponto médio

Com efeito, conhecido o ponto médio M da corda, basta uni-lo com o centro C da circunferência e traçar por M a perpendicular a MC.



Sejam: B o ponto do raio AC tal que a corda perpendicular ED meça uma unidade,
C_1 a circunferência inicial,
C_2 a circunferência de centro C que passa em B.

Área de $C_1 = \pi \times 1^2 = \pi$

Área de $C_2 = \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4}$

Se o ponto M estiver fora de C_2, a corda é menor que 1. Se estiver dentro de C_2, a corda é maior que 1.

Como os pontos da circunferência C_1 são igualmente prováveis, vem:

$$\text{P(corda maior que o raio)} = \frac{\acute{A}rea\ de\ C_2}{\acute{A}rea\ de\ C_1} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

COMENTÁRIOS

As três resoluções estão corretas mas os resultados são todos diferentes. Ora, a probabilidade só pode ter um valor. O que está a falhar aqui?

A falha está no enunciado, que tem de indicar qual é o método aleatório de escolha da corda. Na grande maioria dos problemas só existe uma maneira de fazer a escolha e, portanto, o método está implícito e não é indicado. Mas, se existirem várias formas de escolher os elementos, é obrigatório indicar o processo pretendido, para evitar ambiguidades.