A cardinalidade dos Reais (I)

por José Veiga de Faria

Introdução

Relembramos que esta sequência de artigos sobre cardinalidade visa disponibilizar, para alunos interessados do Ensino Secundário, algumas noções e resultados que não são lecionados nem nesse nível de ensino, por não constarem do programa, nem no Ensino Superior, aqui por falta de tempo, mas que são indispensáveis a uma boa compreensão dos conteúdos universitários.
Um desses resultados é o Teorema que estabelece que o Conjunto dos Números Reais é não numerável.
No seu célebre livro Apologia de um Matemático (*da Gradiva à venda no* site da SPM) o matemático inglês G. H. Hardy considera-o um daqueles que poderia apresentar como sendo de uma beleza indiscutível e como contendo matemática digna de um verdadeiro profissional de Matemática apesar de ser essencialmente muito simples.
Tentaremos apresentá-lo de forma atraente e desafiante de forma a prender o interesse de alunos com interesse pela disciplina.

A Estratégia da Demonstração

Esta é a sequência de etapas que vamos percorrer até obter o resultado:

i) Começamos por dar a conhecer o conjunto dos Números Reais;
ii) Mostramos que o conjunto das sucessões de termos em {0,1}[1] e o subconjunto C deste constituído pelas sucessões cujos termos não são iguais a 1 a partir de uma certa ordem têm a mesma cardinalidade;
iii) Estabelecemos uma bijeção entre C e o intervalo [0,1[;
iv) Indicamos uma bijeção entre [0,1[e $\mathbb{R}$.

E obteremos uma representação binária para os reais.
Este mês apenas percorremos apenas a etapa i).

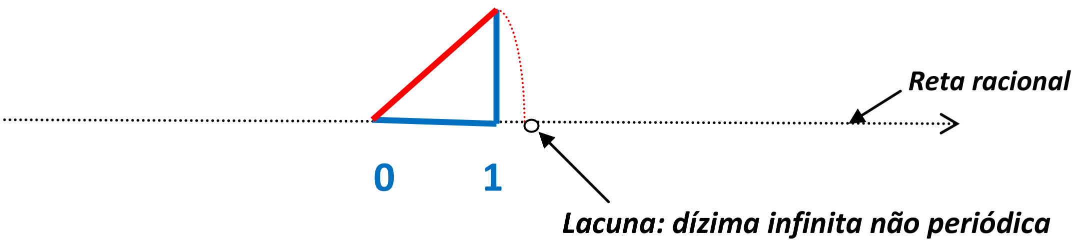
O conjunto dos Números Reais

Já lidou muitas vezes com números reais.
Sabe que é possível adicioná-los e conhece as propriedades da adição, sabe que é possível multiplicá-los e conhece as propriedades da multiplicação e conhece ainda a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
Também conhece a relação de ordem menor ($<$) que permite ordenar os reais numa cadeia única. E sabe que esta relação de ordem está relacionada com a adição e a multiplicação por duas propriedades:

i) Se $x < y$ então $x+z < y+z$ para qualquer z;
ii) Se $0 < x$ e $0 < y$ então $0 < x.y$

[1] Lembra-se que mostrámos que este conjunto é não numerável: ver Para além do Aleph_0

Poderá agora perguntar: será que a existência de uma adição, multiplicação e relação de ordem com as propriedades indicadas chega para caracterizar $\mathbb{R}$?
A resposta é não: **os racionais** têm toda esta estrutura e contudo **não são os Reais**.
Lembra-se com certeza que mostrámos aqui que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é numerável : *ver neste link*.
Assim se $\mathbb{R}$ é não numerável é porque goza de alguma propriedade que não se verifica em $\mathbb{Q}$.
De fato durante muitos anos pensou-se que os racionais eram suficientes para medir qualquer quantidade ou segmento, isto é, pensou-se que escolhida uma unidade e dado um segmento era possível partir a unidade em n partes iguais de forma a que uma delas coubesse um número m finito de vezes no segmento: assim o comprimento do segmento seria $\frac{m}{n}$.
Até que na Antiga Grécia se demonstrou que se a unidade fosse o cateto de um triângulo retângulo isósceles e o segmento a hipotenusa tal não era possível (*Ver demonstração no Apêndice I*).
Na altura foi tal a estupefação que o comprimento da hipotenusa foi considerado uma quantidade irracional…
Atualmente estes ***irracionais*** também se designam por ***lacunas da reta racional***.



Para dar ideia de uma técnica que pode ser usada para preencher estas lacunas pense que um irracional é representado por uma dízima infinita não periódica.
Assim $\sqrt{2}$ = 1,41421356237309…
Se construir a sucessão de racionais indicada a seguir, que dá aproximações da raiz cada vez melhores:

1; 1,4; 1,41; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135; ….

nota que se trata de uma sucessão crescente, limitada de racionais que não tem limite em $\mathbb{Q}$. O limite seria $\sqrt{2}$ que não é racional: é uma lacuna da reta racional.
Isto sugere que os irracionais são as quantidades, não racionais, para que tendem as sucessões de racionais crescentes e limitadas sem limite em $\mathbb{Q}$.
Se acrescentarmos então, na definição de $\mathbb{R}$, o axioma:

"Toda a sucessão crescente e limitada tem limite"

conseguimos preencher todas as lacunas que encontrámos em $\mathbb{Q}$.

Com esta propriedade fica definido o Conjunto dos Reais de forma "única".
Pode mudar o aspeto dos elementos (dízimas, pontos de uma reta, etc…) mas o conjunto é de fato o mesmo.

Pois é este conjunto que vamos mostrar, nos próximos artigos, que é não numerável.

NOTA - Para conhecer os axiomas de definição de forma mais formal ver **Apêndice II**.

Apêndice I

Procederemos por ***redução ao absurdo (****ver Resolução do Problema 3 de Maio****)***.
Supomos que existem *m* e *n* naturais, sem fatores comuns ou seja tais que $\frac{m}{n}$ é irredutível, que verificam a igualdade $(\frac{m}{n})^2 = 2$, ou seja,

$$m^2 = 2n^2 \qquad (1)$$

Então m^2, e por isso *m*, é par. Portanto *n* é ímpar.
Então $m = \dot{2}$ e $n = \dot{2} + 1 \quad (\,ver\ nota)^2$.
Substituindo em (1) e desenvolvendo os quadrados vem:

$$\dot{2} \times \dot{2} = 2 \times (\dot{2} + 1) \quad \text{ou} \quad \dot{4} = \dot{4} + 2$$

o que é absurdo.

Apêndice II

$\mathbb{R}$ é um conjunto

i) Com operações adição (+) e multiplicação ($\times$) tais que:

$(\mathbb{R}, +)\ e\ (\mathbb{R}\backslash\{0\},\times)$ são grupos comutativos

e a multiplicação é distributiva em relação à adição:

$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ *quaisquer que sejam x, y e z*

ii) Com uma relação de ordem total < com as propriedades:

Se x < y então x+z < y+z para qualquer z;
Se 0 < x e 0 < y então 0 < x.y

iii) Onde toda a sucessão crescente e limitada tem limite.

---

[2] A notação $\dot{n}$ designa um múltiplo inteiro de *n*.