Introdução

Um dos objetivos que fixámos para esta rubrica foi o de fornecer um complemento de formação aos alunos do Secundário em temas que não são abordados nem no Ensino Secundário, por não constarem do programa, nem no Ensino Superior, aqui por falta de tempo, e que no entanto são indispensáveis a uma boa compreensão dos conteúdos universitários.
Há cerca de um ano publicámos aqui um conjunto de artigos sobre um desses temas: a Cardinalidade.
Agora estamos a apresentá-los de novo nesta rubrica, revistos e melhorados, com o objetivo de os tornar mais interessantes e formativos.
Se despertarem o interesse e trouxerem proveito a alguns alunos, mesmo que poucos, damos o esforço por bem empregue.

Os Paradoxos do Numerável

ALEPH_0 : um hotel muito especial que nunca está cheio

Um hotel, chamado **Aleph_0**, tem os seus quartos numerados com os números inteiros maiores ou iguais a 1: 1, 2, 3, 4, … Este é o conjunto dos números naturais sem o zero que designaremos por $\mathbb{N}_1$.
Cada quarto tem um número e um só, não há dois quartos com números iguais e todo o número natural está atribuído a um quarto.
Nota: *Diz-se que existe uma aplicação bijectiva de* $\mathbb{N}_1$ *no conjunto dos quartos*.

Cena 1:
Num dado momento chega uma excursão.
O hotel estava vazio e a Recepção resolveu colocar uma pessoa em cada quarto. Quando terminou o registo de clientes verificou que o hotel tinha ficado cheio.

Cena 2:
Passado algum tempo chega mais um cliente.
O recepcionista sentiu-se tentado a despachá-lo: o hotel estava cheio.
Mas ele era bom em Matemática e por isso pôs-se a pensar.
E rapidamente descobriu que trocando as pessoas de quarto conseguia alojar o novo cliente ficando o hotel de novo cheio.
Este Hotel é <u>Paradoxal</u>: nele cabe sempre mais um cliente.

Desafios:

1. *Tente descobrir como pode ele ter procedido antes de* ***<u>Ver a solução</u>***.
2. *Mostre que não é possível resolver o problema incomodando apenas um conjunto finito de hóspedes* ***<u>Ver a solução</u>***

Cena 3:
Passado pouco tempo dirige-se à recepção a guia de uma excursão que põe o problema seguinte: temos os nossos excursionistas numerados tendo cada um número maior ou igual a 1 de modo que não há dois excursionistas com o mesmo número e todos números naturais foram utilizados (*passaremos a referir-nos a esta excursão como ´excursão numerável´*); tem lugar para eles?

Desafios:

3. *Caracterize a aplicação de $\mathbb{N}_1$ no conjunto dos excursionistas.* ***Ver a solução***
4. *Encontre uma solução para alojar estes novos clientes de modo que cada quarto não fique com mais de uma pessoa.* ***Ver a solução***
5. *Aproveite o resultado para encontrar uma bijecção de $\mathbb{N}_1$ no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros.* ***Ver a solução***
6. *Seria possível alojar três 'excursões numeráveis´?*
   Se sim como poderia a Recepção ter procedido. ***Ver a solução***

Cena 4:
Finalmente chegaram várias ´excursões numeráveis´; a cada uma foi atribuído um e um só elemento de $\mathbb{N}_1$ tendo o cuidado de não atribuir o mesmo número a duas excursões diferentes: verificou-se que todos os elementos de $\mathbb{N}_1$ foram usados. Tratava-se de um conjunto numerável de excursões numeráveis.
A Recepção receou não ter lugar para ´tanta gente' mas acabou por conseguir alojar todos ficando cada quarto com um único ocupante.

Desafio:

Como terá procedido? ***Ver a solução***

Soluções:
S1: Cada cliente passa para o quarto seguinte.
S2: Se apenas fossem incomodados os hóspedes de um conjunto finito então hóspedes em quartos com número superior a um certo N não mudariam de quarto. Então deveria haver uma bijeção do conjunto dos hóspedes dos primeiros N quartos mais o novo cliente no conjunto dos quartos com número menor ou igual a N o que não existe.
S3: É uma bijecção.
S4: Cada cliente já hospedado passa do quarto N para o quarto 2N. O novo hóspede com o número N vai ocupar o quarto 2N-1.
S5: Transformamos cada N par de $\mathbb{N}_1$ em $\frac{N}{2}$ e cada N ímpar de $\mathbb{N}_1$ em $\frac{1-N}{2}$.
S6: Sim. Cada cliente já hospedado passa do quarto N para o quarto 3N. O novo hóspede da primeira excursão com o número N vai ocupar o quarto 3N-2. O novo hóspede da segunda excursão com o número N vai ocupar o quarto 3N-1.

S7: Considere a aplicação de $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ em $\mathbb{N}_1$ sugerida pelas linhas seguintes:

$(1,1)_1$ — *Linha de soma Dois.*

$(1,2)_2 \quad (2,1)_3$ — *Linha de soma Três.*

$(1,3)_4 \quad (2,2)_5 \quad (3,1)_6$ — *Linha de soma Quatro.*

$(1,4)_7 \quad (2,3)_8 \quad (3,2)_9 \quad (4,1)_{10}$ — *Linha de soma Cinco.*

$(1,5)_{11}$ ………………

Entenda o primeiro elemento do par como o número da excursão, o segundo como o número do turista nessa excursão e o índice como o número do quarto.

Note que se trata da aplicação: $\begin{array}{l} \varphi: \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{N}_1 \\ (i,j) \longrightarrow \frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2} + i \end{array}$ *e mostre que se trata de uma bijecção. Pode ajudar se notar que* $\frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2}$ *dá o número de inteiros "gastos" nas primeiras i+j-1 linhas e o i dá a "posição" do par (i,j) na linha de soma i+j.*

A cardinalidade do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

É o conjunto dos números que se obtêm dividindo um inteiro por um natural.
É fácil obter uma aplicação φ injectiva de $\mathbb{N}_1$ em $\mathbb{Q}$: para cada n natural $\varphi(n) = n$.
Dado um racional q, se o representar por uma fração irredutível, $q = \frac{m}{n}$, a transformação $q \longrightarrow (m, n)$ é uma aplicação injectiva de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1$.
Aproveitando S5 facilmente constrói uma bijecção de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1$ sobre $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ e usando S7 uma bijecção de $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ sobre $\mathbb{N}_1$. Finalmente tem uma injecção de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{N}_1$.
O teorema de Schroeder-Bernstein (*ver a ultima parte do nosso problema do Disco do Snr. Silva*) garante a existência de uma bijeção de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{N}_1$ o que mostra que $\mathbb{Q}$ é numerável.
Numa terminologia pouco precisa mas sugestiva isso significa que "*há tantos racionais nos reais como naturais*".
Havemos de ver que há muito mais irracionais…(algum paralelismo?...)

NOTA HISTÓRICA

A palavra **paradoxo** vem do grego e significa contrário à opinião comum.
Já a palavra **antinomia** também vem do grego mas significa contra a lei ou contradição.
A grande ousadia de George Cantor foi ter compreendido que o seguinte facto é um paradoxo mas não uma antinomia:
O todo é igual à parte desafiando a ideia Aristotélica de que o todo é sempre diferente da parte.
A chave para resolver o paradoxo foi entender bem as noções envolvidas: para Aristóteles a parte sendo parte, não deveria ter qualquer elemento contido no todo logo era diferente enquanto que, para Cantor, igual era entendido como equicardinal.