Critérios de Divisibilidade

por José Veiga de Faria

Introdução

Quando fiz o último ano do liceu fazia parte do programa um tema com o nome de Aritmética Racional. Nós, que até aí apenas aprendíamos algoritmos para resolver problemas, tínhamos então um cheiro do que é a actividade matemática: deduzir proposições a partir de outras já demontradas. Um dos temas tratados era um estudo elementar das propriedades das congruências. Uma vez que isso foi suprimido, e penso que tinha grande valor formativo, lembrei-me de apresentar aqui, como factor motivador para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, algumas aplicações simples desta noção. Este mês vamos aprender a usar essa noção para deduzir critérios de divisibilidade e no próximo mês usá-la-emos para estabelecer provas para as operações aritméticas básicas.

1. A noção de congruência

Trabalhamos com números inteiros: positivos, negativos e o zero.

Definição Dados três desses números a, b quaisquer e m positivo se a - b é um múltiplo inteiro de m diz-se que a é congruente com b para o módulo m e escreve-se:

$$a \equiv b\,(mod\,m)$$

Os números a e b dizem-se resíduos um do outro.

Assim:

$$11 \equiv 1\,(mod\,10) \qquad 7 \equiv -2\,(mod\,9) \qquad -2 \equiv -5\,(mod\,3)$$

Exercícios

Sendo m um inteiro positivo:

i) Propriedade reflexiva:

$$\forall_{a \in Z} \qquad a \equiv a\,(mod\,m)$$

ii)Propriedade simétrica:

$$\forall_{a,b \in Z} \qquad a \equiv b\,(mod\,m) \Rightarrow b \equiv a\,(mod\,m)$$

iii)Propriedade transitiva:

$$\forall_{a,b,c \in Z} \qquad a \equiv b\,(mod\,m) \wedge b \equiv c\,(mod\,m) \Rightarrow a \equiv c\,(mod\,m)$$

Algumas propriedades

Teorema Sendo a, c, b, d, k e m inteiros e m positivo então:

$$a \equiv b \,(mod\, m) \Rightarrow k \times a \equiv k \times b \,(mod\, m) \tag{1}$$

$$a \equiv b \,(mod\, m) \wedge c \equiv d \,(mod\, m) \Rightarrow a + b \equiv c + d \,(mod\, m) \tag{2}$$

$$a \equiv b \,(mod\, m) \wedge c \equiv d \,(mod\, m) \Rightarrow a \times c \equiv b \times d \,(mod\, m) \tag{3}$$

Deixamos como exercício a prova das duas primeiras proposições e provamos a terceira:
Por (1):

$$a \equiv b \,(mod\, m) \Rightarrow ac \equiv bc \,(mod\, m)$$

$$c \equiv d \,(mod\, m) \Rightarrow bc \equiv bd \,(mod\, m)$$

Pela propriedade transitiva resulta então:

$$ac \equiv bd \,(mod\, m)$$

2. Divisibilidade por 9

Suponhamos agora que queremos ver se o número abcd é divísivel por 9.

Facilmente se reconhece que qualquer potência natural de 10 é congruente com 1 (basta notar que uma tal potência menos um é um número só com noves) para o módulo 9:

$$10^n \equiv 1 \,(mod\, 9).$$

Deste facto e da proposição evidente :

$$\forall_{z \in Z} \qquad z \equiv z \,(mod\, 9)$$

concluímos, por aplicação de (3), que:

$$10^3 \times a \equiv a \,(mod\, 9) \qquad 10^2 \times b \equiv b \,(mod\, 9) \qquad 10 \times c \equiv c \,(mod\, 9) \qquad d \equiv d \,(mod\, 9)$$

Como sabemos que:

$$abcd = 10^3 \times a + 10^2 \times b + 10 \times c + d$$

aplicando (2) obtemos que :

$$abcd = 10^3 \times a + 10^2 \times b + 10 \times c + d \equiv a + b + c + d \,(mod\, 9)$$

Regra de divisibilidade por 9: Um número é divisível por 9 se e só se a soma dos seus algarismos o for.

Exemplo

12345678987654321 será divisível por 9? A soma dos seus algarismos é : 81 que é divisível por 9 logo o número também o é.

3. Divisibilidade por 11

Suponhamos agora que queremos ver se o número abcd é divísivel por 11.

Facilmente se reconhece que:

$$10 \equiv -1 \,(mod\, 11)$$

Daqui, por aplicação de (1), resulta:

$$10^2 \equiv -10 \,(mod\, 11)$$

Como:

$$-10 \equiv 1 \,(mod\, 11)$$

tem-se que, pela propriedade transitiva:

$$10^2 \equiv 1 \,(mod\, 11)$$

Aplicando (1) obtem-se:

$$10^3 \equiv -1 \,(mod\, 11) \qquad 10^4 \equiv 1 \,(mod\, 11)$$

Agora por indição prova-se facilmente (prove como exercício...) que as potências de expoente ímpar de 10 são congruentes com -1 e as de expoente par com 1. Procedendo como no caso anterior obtemos:

$$abcd = 10^3 \times a + 10^2 \times b + 10 \times c + d \equiv a - b + c - d \,(mod\, 11)$$

Regra de divisibilidade por 11: Um número é divisível por 11 se e só se a soma dos seus algarismos colocados em posição par (posição contada da direita para a esquerda) menos a soma dos seus algarismos colocados em posição ímpar o for.

Exemplo

Um número só com 1's é divisível por 11 se e só se o número de algarismos for par.
11111111 é divisível 111 não é.

4. Divisibilidade por 12

Vejamos se o número abcd é divísivel por 12.

Facilmente se reconhece que:

$$10 \equiv -2\,(mod\,12)$$

Daqui, por aplicação de (1), resulta:

$$10^2 \equiv -20\,(mod\,12)$$

Como:

$$-20 \equiv 4\,(mod\,12)$$

tem-se que, pela propriedade transitiva:

$$10^2 \equiv 4\,(mod\,12)$$

Aplicando (1) obtem-se:

$$10^3 \equiv 40\,(mod\,12) \qquad 40 \equiv 4\,(mod\,12)$$

Logo:

$$10^3 \equiv 4\,(mod\,12)$$

Por indução prova-se facilmente que para n maior ou igual a 2

$$10^n \equiv 4\,(mod\,12)$$

Procedendo como nos casos anteriores obtemos:

$$abcd = 10^3 \times a + 10^2 \times b + 10 \times c + d \equiv 4 \times a + 4 \times b - 2 \times c + d\,(mod\,12)$$

Regra de divisibilidade por 12: Um número é divisível por 12 se e só se o quádruplo da soma dos seus algarismos a partir do das centenas inclusivé menos o dobro do das dezenas mais o das unidades o for.

Exemplos

144 é divísivel por 12:

$$4 - 2 \times 4 + 4 = 0$$

11184 é divísivel por 12:

$$4 \times 3 - 2 \times 8 + 4 = 0$$

Sugerimos que estabeleça outros critérios de divisibilidade.

Bibliografia Carl Friedrich Gauss: *Disquisitiones Arithmeticae*