## O mais pequeno dos conjuntos infinitos:  O conjunto $\mathbb{N}$ dos Naturais

O conjunto dos dias à nossa frente "parece" ( e é de facto…) ser o mais pequeno dos conjuntos infinitos pensáveis.

    

Repare que neste importante conjunto:

i) há um dia nesse conjunto que não é seguinte de qualquer outro;

ii) todo o dia tem um dia seguinte diferente dele;

iii) o mesmo dia não pode ser seguinte de dois dia diferentes.

Era necessário agora dar-lhe um nome e dotá-lo de uma axiomática que o definisse de forma rigorosa.

O nome é de conjunto dos números naturais (naturalmente…); a designação**:** $\mathbb{N}$

Quanto à axiomática foi introduzida por Peano, não sabemos se inspirado no conjunto que referimos, e é a que passamos a enunciar e explicar.

# Os Axiomas de Peano

**Axioma 1 (A1)** : $\mathbf{0} \in \mathbb{N}$

***Explicação***: *Este axioma estabelece que N tem pelo menos um elemento.*

**Axioma 2 (A2)**: $\underset{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}{\forall} \ \underset{\boldsymbol{suc\ n} \in \mathbb{N}}{\exists|} : \boldsymbol{suc\ n} \neq \boldsymbol{n}$

***Explicação***:

*Este axioma estabelece que para cada número natural há um, e só um, natural diferente dele a que se chama o sucessor de n. Assim 0 tem um sucessor a que podemos chamar 1 e este tem também um sucessor, diferente dele.*

***NOTA*** - *Até aqui nada impede que suc 1 = 0. E se fosse esse o caso o conjunto {0, 1} verificava A1 e A2 e podia então chamar-se o conjunto dos números naturais. Ora não queremos que isso aconteça. Para o evitar acrescentamos um novo axioma.*

**Axioma 3 (A3): 0 não é sucessor de qualquer natural ou, usando formalismo lógico,**

$$\underset{n\,\in\,\mathbb{N}}{\forall} \boldsymbol{suc\, n \neq 0}\ .$$

***Explicação***:

*Agora o sucessor de 1 não pode ser 0 nem 1 logo deverá ser um outro elemento: chamemos-lhe 2. Este 2 tem também um sucessor mas, até agora, nada impede que seja 1. Se isso acontecesse o conjunto {0,1,2} verificaria A1, A2 e A3 e poderia chamar-se* $\mathbb{N}$*. Como queremos evitar que isso a aconteça juntamos um novo axioma.*

**Axioma 4 (A4): O mesmo número não pode ser sucessor de elementos diferentes ou formalmente:** $\boldsymbol{suc\, m = sucn \Longrightarrow m = n}$**.**

***Explicação***:

*Então o sucessor de 2 não pode ser nenhum dos anteriores (0 não pode por A2 e os outros já são sucessores) : chamemos-lhe 3; o mesmo se passa com o sucessor de 3 a que podemos chamar 4, etc.*

*Mas não podemos ficar por aqui: se ficássemos teríamos de chamar N ao conjunto R dos números reais pois verifica os quatro axiomas. E esse não é o N que temos em mente: havemos de ver que é "maior".*

*Há que acrescentar um último axioma que nos garanta que os naturais são o "menor" conjunto que verifica os quatro axiomas indicados:*

**Axioma 5 (A5):. Se P é uma parte de** $\mathbb{N}$ **e:**

**i)** $\boldsymbol{0} \in \mathbb{N}$**;** **Base de Indução**

**ii)** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \Longrightarrow \boldsymbol{suc\, n} \in \mathbb{N}$ **Princípio da hereditariedade**

**então P =** $\mathbb{N}$**.**

***Explicação***:

*Repare que agora que R não verifica A5 pois o conjunto* $P = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$ *verifica i) e ii) e*

*P ≠ R.*

Este axioma é a base de um princípio de prova muito importante em matemática: **O Princípio de Indução**.

Pode provar-se que dois conjuntos que verifiquem esta axiomática são de facto o mesmo conjunto, isto é, só diferem no aspeto dos seus elementos. Como os conjuntos {0,1,2,3,…} ou $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. Em linguagem lógica diz-se que esta axiomática é categórica o que significa que, se dois conjuntos A e B verificam os axiomas então existe $\varphi: A \longrightarrow B$ bijectiva e tal que $\varphi(0) = 0$ e para todo o n em A $\varphi(sucn) = suc\varphi(n)$.

Peano provou que existe uma relação de ordem em $\mathbb{N}$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ n < suc n.

Isto habilita-nos a definir o que é um conjunto finito.

## Conjuntos finitos

A é finito se e só se $A = \emptyset$ ou se existe um n em $\mathbb{N}$ e uma bijeção de A no conjunto dos naturais menores ou iguais a n**.** Diz-se que a cardinalidade de A é n: Card(A)=n.

## O menor dos conjuntos infinitos

Finalmente consegue provar-se que se A é infinito tem "tantos ou mais" elementos do que $\mathbb{N}$, ou seja, que existe $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow A$ injectiva.

$\mathbb{N}$ **é** portanto **o "menor dos conjuntos infinitos"**.

### O Aleph 0: $\aleph_0$

Os conjuntos[1] que "*têm tantos elementos*" como $\mathbb{N}$, isto é para os quais existe $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow A$ bijectiva, diz-se que têm a ***cardinalidade do numerável: o Aleph0*** designado por $\aleph_0$ .

É dela e dos seus paradoxos que nos vamos ocupar no próximo artigo.

[1] Em particular qualquer subconjunto A infinito de $\mathbb{N}$ tem "tantos elementos" como ele próprio querendo dizer com isto que, além de existir $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow A$ injectiva (como indicámos acima) existe $\varphi: \mathrm{A} \longrightarrow \mathbb{N}$ injectiva (por exemplo a que transforma qualquer elemento nele próprio). A existência destas duas aplicações injectivas garante a existência de uma aplicação bijectiva : este é o célebre teorema de Schroeder-Bernstein que se tiver interesse em conhecer pode fazê-lo no artigo que aqui publicámos com o link: http://www.clube.spm.pt/files/outros/Prob_04_Maio_2011.pdf

# Apêndice

**Princípio de Indução.**

Se tivermos uma proposição P(n) que depende de um n natural e quisermos mostrar que é verdadeira para todo o n natural, o axioma 5 garante que basta mostrar que:

i) P(0) é verdadeira ( ***0 chama-se a Base de Indução*** )

ii) Se P(n) é verdadeira então P(n+1) é verdadeira (Chama-se a ***Hereditariedade de P(n)***)

Então, pelo Axioma 5: $\{n \in \mathbb{N}: P(n)$ é verdadeira$\} = \mathbb{N}$.

**Exemplos:**

1.Mostrar que o conjunto das partes de um conjunto com n elementos tem $2^n$ elementos.

***Base de indução:*** A proposição é verdadeira para n = 0: $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ; $2^0 = 1$.

***Hereditariedade:***

**Hipótese:** A proposição é verdadeira se card(X)=n;

**Tese**: A proposição é verdadeira se card(X)=n+1.

**Prova**:

Seja $X = Y \cup \{a\}$ onde card(Y) = n. Os subconjuntos de X são os subconjuntos de Y, que são $2^n$ por hipótese, e a reunião de cada um destes com $\{a\}$ que são obviamente em igual número. Então : $card(\wp(X)) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

2. Pode ver ainda o nosso problema de Abril em: http://www.clube.spm.pt/arquivo/1139