Quanto vinho é que esta água tem? Resolução

Vamos chamar A ao pipo onde o nosso Silva trafulha começou por deitar a água e B ao outro onde estava o vinho.

As quantidades iniciais, vamos designá-las por x e y, de água e vinho nos dois pipos são-nos desconhecidas: incógnitas!

Mas sabemos que, depois de qualquer das três das operações do taberneiro, as quantidades de água e vinho, em qualquer dos pipos, podem obter-se das quantidades antes da operação multiplicando-as por constantes e adicionando ou subtraindo os resultados: são uma combinação linear das quantidades iniciais.

No fim da primeira operação as quantidades de água e vinho em cada pipo são, pois, combinações lineares de x e y: são da forma $ax + by$.

E como combinações lineares de combinações lineares de x e y são combinações lineares de x e y as quantidades finais são dadas por combinações lineares de x e y.

As condições que são dadas, ou seja, a igualdade de quantidades de líquido nos dois pipos e a diferença entre quantidades de água e vinho no pipo A depois das três operações traduzem-se, assim, em duas igualdades de combinações lineares de x e y.

Formam um sistema muito simples de duas equações lineares com duas incógnitas.

Se tudo correr bem terá uma só solução, isto é, as duas equações representarão rectas concorrentes num referencial cartesiano, e basta-nos resolver o sistema para obter a resposta.

Vamos então pôr mãos à obra e acompanhar a evolução das quantidades em cada um dos pipos:

	Pipo A		Pipo B	
	Água	Vinho	Água	Vinho
Inicial	x	0	0	y
1.ª Op	$x-y$	0	y	y
2.ª Op	$\frac{3}{2}(x-y)$	$\frac{1}{2}(x-y)$	$y-\frac{x-y}{2}$	$y-\frac{x-y}{2}$
3.ª Op	$\frac{3}{2}(x-y)-\frac{3}{4}(3y-x)$	$\frac{1}{2}(x-y)-\frac{1}{4}(3y-x)$	$\frac{5}{4}(3y-x)$	$\frac{3}{4}(3y-x)$

Vejamos agora as condições dadas para as quantidades finais:

i) Sabemos que as quantidades de líquido nos dois pipos são iguais, isto é:

$$3x-5y=-2x+6y$$

ii) E sabemos que o pipo A tem mais 4 litros de água do que de vinho:

$$\frac{9}{4}x-\frac{15}{4}y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}y+4$$

Isto conduz-nos ao sistema: $\begin{pmatrix}5 & -11\\ 6 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 16\end{pmatrix}$

que é possível e determinado. A solução é: $x=11,\ y=5$

À disposição do Ernesto e companhia havia, portanto:

No pipo A: 6 litros de água e 2 de vinho,

No pipo B: 5 litros de água e 3 de vinho.

Resolução do sistema:

O excelente "motor computacional de conhecimento" **WolframAlpha,** pode aceder ***aqui***[1] , permite que os alunos vejam a resolução de problemas com algoritmo, passo a passo.

Deixamos aqui a resolução do sistema acima pelos Métodos de:

i) Eliminação

Solve the following system:

$$\begin{cases} 5x - 11y = 0 & \text{(equation 1)} \\ 6x - 10y = 16 & \text{(equation 2)} \end{cases}$$

Swap equation 1 with equation 2:

$$\begin{cases} \boxed{6x - 10y = 16} & \text{(equation 1)} \\ \boxed{5x - 11y = 0} & \text{(equation 2)} \end{cases}$$

Subtract $\frac{5}{6}\times$(equation 1) from equation 2:

$$\begin{cases} 6x - 10y = 16 & \text{(equation 1)} \\ \boxed{0x - \frac{8y}{3} = \frac{-40}{3}} & \text{(equation 2)} \end{cases}$$

Divide equation 1 by 2:

$$\begin{cases} \boxed{3x - 5y = 8} & \text{(equation 1)} \\ 0x - \frac{8y}{3} = -\frac{40}{3} & \text{(equation 2)} \end{cases}$$

Multiply equation 2 by $-\frac{3}{8}$:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 & \text{(equation 1)} \\ \boxed{0x + y = 5} & \text{(equation 2)} \end{cases}$$

Add $5\times$(equation 2) to equation 1:

$$\begin{cases} \boxed{3x + 0y = 33} & \text{(equation 1)} \\ 0x + y = 5 & \text{(equation 2)} \end{cases}$$

Divide equation 1 by 3:

$$\begin{cases} \boxed{x + 0y = 11} & \text{(equation 1)} \\ 0x + y = 5 & \text{(equation 2)} \end{cases}$$

Collect results:

Answer:

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = 5 \end{cases}$$

---

[1] A assinatura custa cerca de 16 cêntimos por dia.

ii) Substituição:

Solve the following system:

$$\begin{cases} 5x - 11y = 0 \\ 6x - 10y = 16 \end{cases}$$

Choose an equation and a variable to solve for.

In the first equation, look to solve for x:

$$\begin{cases} \boxed{5x - 11y = 0} \\ 6x - 10y = 16 \end{cases}$$

Isolate terms with x to the left hand side.

Add $11y$ to both sides:

$$\begin{cases} \boxed{5x = 11y} \\ 6x - 10y = 16 \end{cases}$$

Solve for x.

Divide both sides by 5:

$$\begin{cases} \boxed{x = \frac{11y}{5}} \\ 6x - 10y = 16 \end{cases}$$

Perform a substitution.

Substitute $x = \frac{11y}{5}$ into the second equation:

$$\begin{cases} x = \frac{11y}{5} \\ \boxed{\frac{16y}{5} = 16} \end{cases}$$

Choose an equation and a variable to solve for.

In the second equation, look to solve for y:

$$\begin{cases} x = \frac{11y}{5} \\ \boxed{\frac{16y}{5} = 16} \end{cases}$$

Solve for y.

Multiply both sides by $\frac{5}{16}$:

$$\begin{cases} x = \frac{11y}{5} \\ \boxed{y = 5} \end{cases}$$

Perform a back substitution.

Substitute $y = 5$ into the first equation:

Answer:

$$\begin{cases} \boxed{x = 11} \\ y = 5 \end{cases}$$

iii) Eliminação de Gauss

Solve the following system:

$$\begin{cases} 5x - 11y = 0 \\ 6x - 10y = 16 \end{cases}$$

Express the system in matrix form:

$$\begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Write the system in augmented matrix form and use Gaussian elimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -11 & 0 \\ 6 & -10 & 16 \end{array}\right)$$

Swap row 1 with row 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -10 & 16 \\ 5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

Subtract $\frac{5}{6} \times$(row 1) from row 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -10 & 16 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{40}{3} \end{array}\right)$$

Divide row 1 by 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 8 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{40}{3} \end{array}\right)$$

Multiply row 2 by $-\frac{3}{8}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Add $5 \times$(row 2) to row 1:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Divide row 1 by 3:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Collect results:

Answer:

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = 5 \end{cases}$$

iv) Regra de Cramer

Solve the following system:

$$\begin{cases} 5x - 11y = 0 \\ 6x - 10y = 16 \end{cases}$$

Express the system in matrix form:

$$\begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Solve the system with Cramer's rule:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -11 \\ 16 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}} \text{ and } y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}}$$

$\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} = -(-11 \times 6) + 5(-10) = 16$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -11 \\ 16 & -10 \end{vmatrix}}{\boxed{16}} \text{ and } y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 16 \end{vmatrix}}{\boxed{16}}$$

$\begin{vmatrix} 0 & -11 \\ 16 & -10 \end{vmatrix} = 0(-10) - -11 \times 16 = 176$:

$$x = \frac{\boxed{176}}{16} \text{ and } y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 16 \end{vmatrix}}{16}$$

Divide 176 by 16: $\frac{176}{16} = \frac{11 \times 16}{1 \times 16} = 11$:

$$x = \boxed{11} \text{ and } y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 16 \end{vmatrix}}{16}$$

$\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 16 \end{vmatrix} = 5 \times 16 - 0 \times 6 = 80$:

$$x = 11 \text{ and } y = \frac{\boxed{80}}{16}$$

Divide 80 by 16: $\frac{80}{16} = \frac{5 \times 16}{1 \times 16} = 5$:

Answer:

$$x = 11 \text{ and } y = \boxed{5}$$

Experimentei ainda usar a inversa da matriz dos coeficientes:

Find the inverse:

$$\begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}^{-1}$$

The inverse of a 2×2 matrix is given by the formula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Using a formula for the inverse of a 2×2 matrix, $\begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}^{-1} =$

$\frac{1}{-(6(-11))+5(-10)}\begin{pmatrix} -10 & 11 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$:

$$\frac{1}{-(-11\times 6)-10\times 5}\begin{pmatrix} -10 & 11 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Simplify the coefficient.

Simplify: $\frac{1}{-(6(-11))+5(-10)} = \frac{1}{16}$:

Answer:

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -10 & 11 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Computed by Wolfram|Alpha

E agora:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -10 & 11 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$