Problema 1:

i) Resolução e um concurso

O número de casos possíveis, igualmente possíveis, é o número de formas diferentes de colocar as 24 pessoas em frente dos 24 cartões com o nome dos participantes que não é mais do que o número de permutações de 24 objetos, ou seja, 24 fatorial.

Vamos chamar Π_N ao número de maneiras de, numa sequência de N objetos, trocarmos as suas posições de forma que nenhum fique no mesmo lugar.

Então o número, de entre os casos possíveis, dos casos favoráveis ao nosso acontecimento é Π_{24} .

E a probabilidade P pedida é: $\frac{\Pi_{24}}{24!}$.

Na resolução do problema 2 de outubro (*pode consultar <u>aqui</u>*) estabelecemos a seguinte fórmula de recorrência:

$$\Pi_N = (N-1)[\Pi_{N-2} + \Pi_{N-1}]$$
 para $N > 3$

Assim, com algum trabalho, e sabendo que $\Pi_2=1$ e $\Pi_3=2$, o leitor poderá obter o valor de Π_{24} .

Nós não quisemos ter esse trabalho e, em vez disso, elaborámos um pequeno programa em Just Basic, com meia dúzia de linhas, que nos deu de imediato os seguintes valores:

 $\Pi_{24} = 228250211305338670494289$

24! = 620448401733239439360000

P = 0.36787944

Um concurso

Lembrando-nos da sugestão de Cédric Vilani (*pode ver <u>aqui</u>*), quando lhe pediram para indicar uma medida que contribuísse melhorar a preparação matemática dos alunos do secundário, resolvemos abrir um pequeno concurso para alunas ou alunos de idade inferior a 18 anos.

Então vamos oferecer um exemplar do livro **Os Inovadores** de *Walter Isaacson* (a fascinante história da revolução digital desde o tear mecânico de Jacquard até ao Facebook; *ver aqui*) àquela ou àquele que for de entre os dez primeiros a enviar-nos para o email:

jvf.ClubeMat.SPM@gmail.com

o código de um programa, e o seu executável, em Basic, Just Basic, Fortran ou C, que faça o seguinte:

- i) Peça um número N;
- ii) Teste se é inteiro e maior do que 3;
- iii) Faça o print de Π_N , N!, $\frac{\Pi_N}{N!}$

o que tiver redigido o melhor código.

Não se esqueça de enviar o nome, morada e comprovativo da idade.

A data limite é 29 deste mês. Pedimos aos professores que divulguem o concurso: quem sabe se não desperta uma vocação?

ii) Resolução 1

Vamos demonstrar a possibilidade recorrendo ao **Método de Redução ao Absurdo** (sobre este método pode gostar de ver a resolução do nosso problema de Maio de 2012 <u>aqui</u>).

Admitimos então, provisoriamente, que não é possível com uma rotação da mesa deixar duas pessoas no lugar correto.

Suponha caro leitor/a que atribuímos a cada uma das pessoas sentadas à volta da mesa, e que não estão na posição correta, um número que é o número de posições que ela precisa de saltar, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, para chegar ao lugar com o seu cartão.

Das vinte e três pessoas nestas condições não há duas com o mesmo número atribuído pois se houvesse uma rotação desse número de posições deixaria duas no lugar correto. Então esses números são todos distintos e como estão entre um e vinte e três e há vinte e três pessoas mal sentadas esses números são os números de um a vinte e três.

Agora imagine que resolvemos sentar as pessoas no lugar certo procedendo assim:

- i) Fazemos o senhor X, mal sentado, saltar, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, o número de posições que o leva ao seu cartão e onde vamos encontrar um Y mal sentado (porquê caro leitor/a?).
- ii) Fazemos o mesmo a Y: rodamos até encontrar o cartão de Y. E assim sucessivamente. Neste processo acabamos por chegar à posição inicial de X (*porquê caro leitor/a?*) e nessa altura já saltamos, no total do processo, um numero de posições que é múltiplo de 24.
- iii) Se por acaso ainda houver alguém mal sentado escolhemos uma dessa pessoas e repetimos o processo e o número de saltos é outra vez um múltiplo de 24. E assim sucessivamente até sentar toda a gente corretamente.

Quando toda a gente estiver sentada o número total de saltos foi a soma dos números de 1 a 23 e, como vimos, é um múltiplo de 24.

Mas
$$1 + \dots + 23 = \frac{23 \times 24}{2}$$
 = 276 que não é múltiplo de 24.

Resolução 2

Recorremos ainda ao Método de Redução ao Absurdo.

E vamos usar a adição modular com módulo 24 (ver NOTA no fim).

Numeramos as posições das pessoas mal sentadas de 1 a 23 sequencialmente, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, a partir da pessoa que está no lugar correto.

E designamos por p_i a posição da pessoa i (i = 1,..., 23) e por r_i o número de posições que i tem de saltar, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, para chegar à posição c_i do seu cartão.

O conjunto dos p_i é igual ao conjunto dos c_i e igual ao conjunto dos c_i e não é mais do que $\{1, \dots, 23\}$.

Então para cada i é: c_i = $(p_i + r_i) \ mod 24$.

Designando por S a soma dos números de 1 a 23 e somando, membro a membro, as igualdades acima para *i* de 1 a 23 obtemos:

$$S + 2\dot{4} = 2 \times S$$

o que implicaria $S=\dot{24}\;$ e já vimos que não é.

Desafio

Consegue mostrar, de forma agora muito simples, que se todos estiverem mal sentados também é possível rodar a mesa de forma a que pelo menos dois fiquem no lugar certo?

NOTA

Se a e b são inteiros positivos $(a + b) \mod M$ é o resto da divisão de a + b por M.