2018 Fevereiro

Problema 1: Resolução

O empregado foi ter com a colega e namorada recente Sara contou-lhe o pedido, pegou num lápis e, de imediato, escreveu num papel:

$$2 \times 2N + 4 \times 2N = 12N = \dot{5}$$

E pensou: "os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5; como $12N$ é par tenho de procurá-lo terminado em zero, logo N tem de ser um múltiplo de 5".

O único múltiplo de 5 que multiplicado por 12 dá um número maior do que zero e inferior ou igual a 100 é 5.

E disse à Sara:

- Dou-lhes 10 moedas de 2 euros, 40 moedas de 1 euro e 8 notas de 5.

A Sara estava impressionada… e encorajou-o a explicar aos clientes o brilhante raciocínio.

O nosso amigo dirigiu-se à mesa do Carlos e do Eduardo com o troco explicou como tinha pensado e disse:

- Vocês são macacos, retiraram o zero para que não houvesse outra solução; se só tivessem referido que o número de moedas de 2 euros era par entregava 20 moedas de 5 euros e tinham que calar o bico.

Uma rapariga, sentada na mesa ao lado que ouvia a exposição com interesse, não se conteve:

- Então o zero é par?! …

Foi então que o Eduardo Cabezón, já impressionado com a performance do empregado, se lançou numa breve exposição:

- É uma questão de definição, não é nenhum dogma imposto sabe-se lá por quem. Mas quando se pensa no *Anel dos Inteiros* é natural que se queira que o subconjunto dos pares seja um *Sub-Anel, e um Ideal*[1], o que não se conseguiria se retirássemos o zero.

E continuou:

- Em Matemática estas opções nas definições são escolhidas para facilitar a obtenção de novos resultados ou para atingir resultados conhecidos de forma mais simples e elegante: são de certa forma instrumentais.

[1] Sobre estas noções ver a Resolução do Problema 2 de Novembro de 2016 ***aqui***.

Nota Final

O que se passa com o zero é um pouco o que se passa com a noção de limite.

Quando se define limite, num ponto a, de uma função real de variável real de domínio D, como o limite comum de todas as sucessões da forma $f(x_n)$[2] onde x_n é uma sucessão de pontos de D que tende para a faz-se para conseguir demonstrar os Teoremas Fundamentais da Análise de forma mais simples e clara e tornar a exposição teórica mais elegante.

*Foi o que fez o **Prof. Campos Ferreira** no seu excelente curso de **Introdução à Análise Matemática** e é o que faz grande matemático, Medalha Fields 2006, **Terence Tao** no seu excepcional livro **Analysis I**[3].*

Tao explica com estas palavras a sua opção:

"Some authors only define the $\lim x \to a: x \in D\ f(x)$ when D does not contain a … or would use the $\lim x \to a: x \in D\ f(x)$ to denote what we now call $\lim x \to a: x \in D \backslash \{a\}\ f(x)$, but we have chosen a slightlymore general notation, which allows the possibility that D contains a".

Penso que o prof. Campos Ferreira subscreveria estas palavras acrescentando, eventualmente, a maior facilidade com que se obtêm certos resultados.

Mas o essencial a reter é que estas definições não são uma imposição dogmática, mas uma escolha de quem quer expor um conjunto de resultados envolvendo estas noções.

Já agora, e no caso da noção de limite, convém sublinhar duas coisas essenciais:

i) A noção de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ procura traduzir, de forma rigorosa, a ideia de que pontos perto de a têm imagem perto de b, ou de que quando nos aproximamos de a a nossa imagem se aproxima de b;

ii) Daí que se retirar, na definição, a possibilidade de x ser a temos de garantir que podemos aproximar-nos arbitrariamente perto de a, ou seja, temos de exigir que a seja ponto de acumulação de D.
Se não o fizermos a noção deixa de ter interesse para pontos $a \in D$ isolados: facilmente se prova que qualquer ponto real, mais ou menos infinito seriam limites do mesmo f em a.

---

[2] Esta é a definição de Heine, equivalente à de Cauchy que se escreve com recurso a vizinhanças.
[3] Editado por Hindustan Book Agency