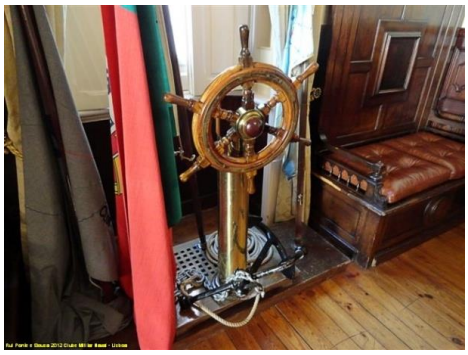
Problema 2



Introdução

Estes problemas foram retirados de um livro de Mauricio Kraitchik, que pertence ao Clube Militar Naval e que me foi amavelmente emprestado pelo Comandante Valentim Rodrigues Capitão de Mar e Guerra da Marinha de Guerra Portuguesa. Quero com este problema sublinhar a forte ligação entre a Marinha e a Matemática.

1. Fermat fez notar que os números da forma $2^m + 1$ não podem ser primos quando m contém um factor ímpar.
   Caro leitor/a é capaz de descobrir porquê? *Ver sugestão **aqui**...*

2. Fermat também afirmou que os números da forma $2^{2^n} + 1$, chamados números de Fermat, são primos. Quase um século depois Euler descobriu que Fermat estava errado: de forma extremamente simples e elegante, mostrou que o quinto número de Fermat, $2^{32} + 1$, é divisível por 641.
   Não tinha computadores! Apenas notou que:

$$641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4 = 5 \times 2^7 + 1.$$

   E, partindo daqui e usando congruências de módulo 641, em quatro passos muito fáceis, mostrou que $2^{32} \equiv -1 \; mod \; 641$, ou seja, que $2^{32} + 1$ é múltiplo de 641.

Caro leitor/a quer tentar descobrir os passos de Euler? Basta-lhe usar propriedades elementares de congruências que pode encontrar no nosso artigo **Critérios de Divisibilidade,** de Junho de 2013, que pode consultar ***aqui.***

Sugestão: Pondo $m = (2k + 1) \times d$ verifique que $2^m + 1$ é divisível por $2^d + 1$.