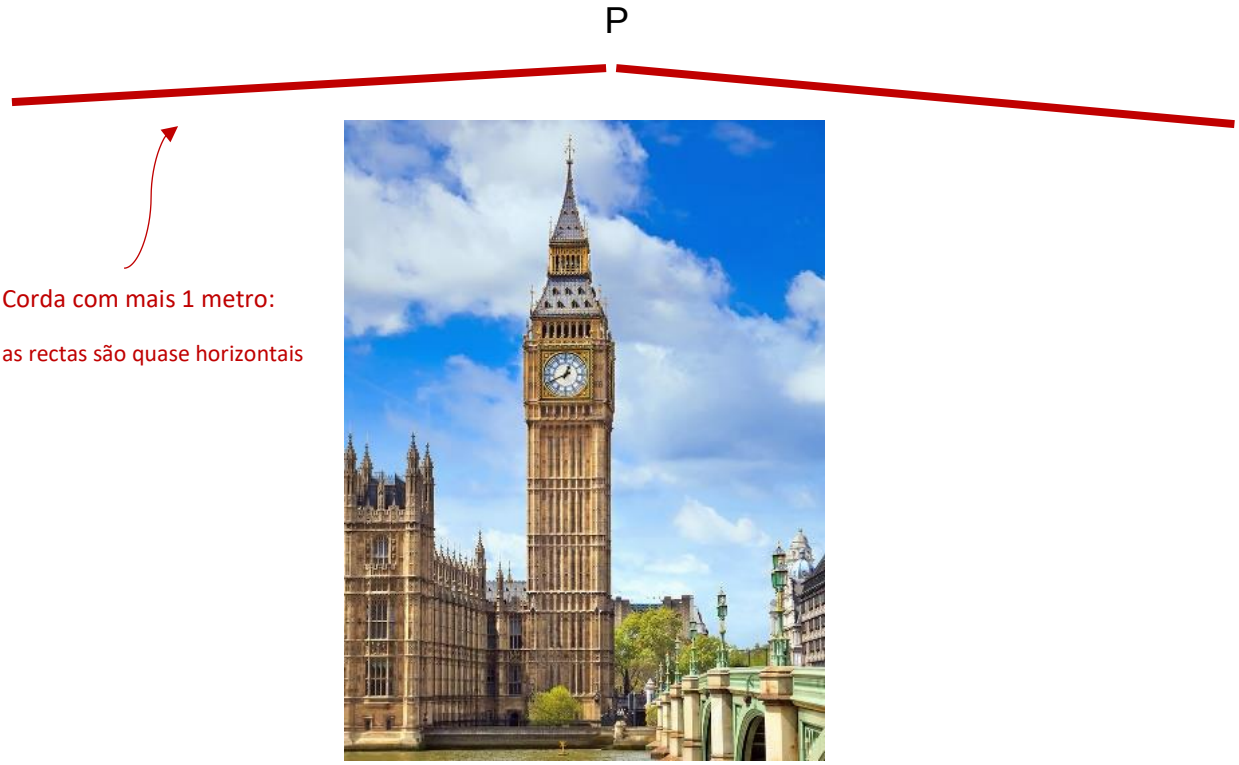
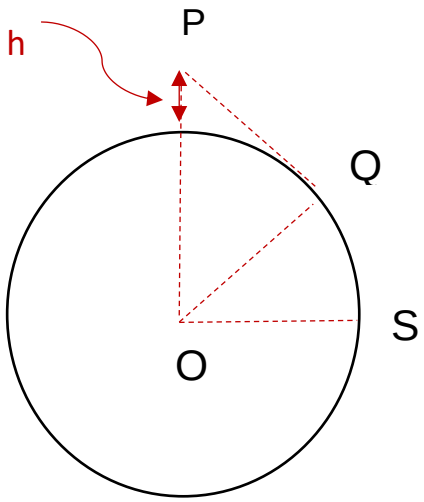
Problema 2



Resolução 1

Se designar por θ o ângulo $\sphericalangle POQ$, onde Q é o ponto de tangência da recta tangente à circunferência que passa por P, então facilmente reconhece que h é função de θ.



Sendo R o raio da circunferência é:

$$cos\ \theta = \frac{R}{R+h} = \frac{1}{1+\frac{h}{R}} \qquad \text{logo} \qquad h = R(sec\ \theta - 1) \qquad (1)$$

Temos agora de encontrar o valor de θ que corresponde a um comprimento da corda que excede em 1 metro o perímetro do Equador.

Note que $\overline{PQ} = Rtg\,\theta$, que o comprimento do arco de circunferência entre S e Q é $R\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ e que o comprimento l da corda entre P e S é a soma dos dois valores.

Como queremos que l exceda em 0,5 metros o comprimento de um quarto do perímetro da circunferência, e tomando R em metros, chegamos à igualdade:

$$Rtg\,\theta + R\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = R\,\frac{\pi}{4} + 0{,}5 \qquad \text{ou} \qquad R\,(tg\,\theta - \theta) = 0{,}5 \qquad (2)$$

E agora, caro leitor/a, desafiámo-lo a recorrer ao *Motor Computacional de Conhecimento* que já referimos no Problema 1 de Maio de 2016 (*pode ver* **aqui**) : o **WolframAlpha**.

Então, clique **aqui.**

E agora, na linha de comandos, digite:

6.4 * 10^6 * (tg x – x) = 0.5

Vai ver que obtém $\theta \sim 0{,}006165498$

Agora, e de novo na linha de comandos, digite: 6.4 * 10^6 * ((1/cos(0.006165498))-1)

E obtém *h* = 121,645 … ***superior à altura do Big Ben*** que é de 96 metros!

Resolução 2

Mas agora imagine, caro leitor/a, que é da velha guarda e abomina computadores e máquinas de calcular.

Haverá solução para si?

Claro que há!... basta recorrer ao bom velho **Cálculo Diferencial** onde a célebre **Fórmula de Taylor**[1] nos permite substituir localmente, isto é, numa vizinhança de um ponto, e se as funções forem suficientemente regulares, funções por um polinómio com um erro muito pequeno se o raio da vizinhança for pequeno.

Ora $\frac{h}{R}$ e θ são extremamente pequenos e, por isso, recorrendo à fórmula referida é:

$$\frac{1}{1+\frac{h}{R}} \sim 1 - \frac{h}{R} \quad \text{e} \quad \cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Logo, e recorrendo a (1), $\quad h = R\,\frac{\theta^2}{2}$

[1] **Fórmula de Taylor**: se f tem derivada de ordem n finita em a então:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + \varepsilon(h) \quad \text{onde } \frac{\varepsilon(h)}{h^n} \dashrightarrow 0 \text{ quando } h \to 0$$

Para obter θ recorremos a (2) notando que, como $tg\,\theta \sim 1 + \frac{\theta^3}{3!}$, de novo a Fórmula de Taylor, é $R\frac{\theta^3}{3} \sim 0{,}5$ e $\theta \sim \sqrt[3]{\frac{3}{2R}}$

Finalmente:

$$h \sim R\sqrt[3]{(\frac{3}{2R})^2} = \frac{\sqrt[3]{R}}{2}\ \sqrt[3]{(\frac{3}{2})^2}$$

E agora, se não quiser usar nem mesmo as calculadoras mais elementares, vai ter de extrair duas raízes cúbicas, as de 6,4 e de 2,25!

Consegue com uma boa aproximação?

Se calhar vai gostar de se inspirar no nosso problema de Abril de 2016 e na sua resolução: pode ver **aqui**.

Finalmente um pequeno desafio final

Se fosse em Plutão qual seria o valor de h (*raio de Plutão 1.160 Km*)? E se fosse em Júpiter (*raio de Júpiter 71.500 km*)?

Consegue ver o limite para que tende h quando R tende para infinito? E a inclinação das tangentes que passam por P?