Problema 2: Resoluções

Apresentamos três resoluções diferentes, por ordem crescente de simplicidade como acontece, em geral, quando se aborda um problema matemático e não só: a simplicidade dá trabalho ou requer inspiração.

A este respeito é paradigmática a carta que o Padre António Vieira escreveu a um amigo e que terminava com um pedido desculpa por ela ser tão longa, mas não tinha tempo de a redigir mais curta!

Resolução 1

1.ª questão:

Vamos designar Usain Bolt por B, Telma Monteiro por T e o comprimento da pista por E.

i) Enquanto Usain Bolt (B) dá uma volta a Telma Monteiro (T) percorreu um quinto da pista: $\frac{E}{5}$; e ficou na posição P1.

ii) Quando B chega a P1 já T está à frente: andou um quinto da distância percorrida por B, ou seja, $\frac{E}{5^2}$ e ficou na posição P2.

iii) Quando B chega a P2 já T está à frente: andou um quinto da distância percorrida por B, ou seja, $\frac{E}{5^3}$. Ficou na posição P3.

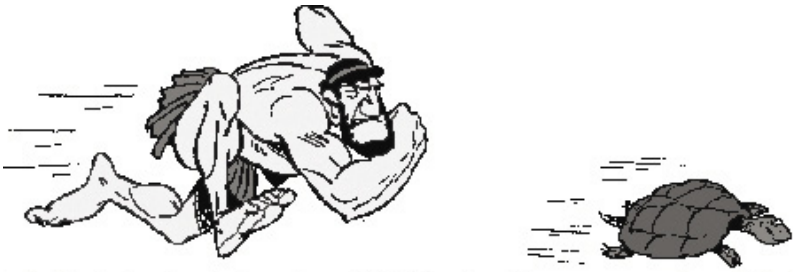
Vemos agora que este processo se repete indefinidamente e que se quisermos calcular D temos de somar todas estas distâncias. Isso leva-nos a calcular a soma:

$$D = \frac{E}{5} + \frac{E}{5^2} + \frac{E}{5^3} + \cdots$$

Trata-se de uma soma com uma infinidade de parcelas maiores do que zero!

Ora isso poderia levar-nos a pensar que D não era finito e que, portanto, Bolt nunca ultrapassaria a Telma.

Argumentos deste tipo aparecem nos célebres paradoxos propostos na Antiga Grécia por ***Zenão de Elea***; este, em concreto, é o **Paradoxo de Aquiles e da Tartaruga** *(ver nota no fim).*



Para ver que D existe, é finito e único basta reconhecer que:

i) D deverá ser superior a todas as somas $S_N = \frac{E}{5} + \frac{E}{5^2} + \frac{E}{5^3} + \cdots + \frac{E}{5^N}$ pois resultam da soma acima por eliminação das parcelas, positivas, a partir da *N*-ésima;

ii) Existe um número superior a todos os S_N ;

iii) D deverá ser, dos números superiores a todos os S_N, o menor pois se algum M é superior a todos os S_N é natural admitir que D não excede M;

iv) Um número que satisfaça i), ii) e iii) será D.

Ora para todo o N é $S_N = \frac{E}{5} \times \frac{1-\frac{1}{5^N}}{1-\frac{1}{5}}$ pois trata-se da soma de $N+1$ termos consecutivos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{E}{5}$ e a razão é $\frac{1}{5}$.

E, também para todo o N, é $S_N < \frac{E}{5} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = S$ logo S satisfaz i).

Acontece que S também satisfaz iii) pois se $p < S$ então $p < S_n$ para $5^n > \frac{\frac{E}{4}}{\frac{E}{4}-p}$

Então D é igual a S, ou seja, $D = \frac{E}{5} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{E}{4}$

2.ª questão:

Basta na resolução anterior substituir 5 por N; obtemos:

$$D = \frac{E}{N} \times \frac{1}{1-\frac{1}{N}} = \frac{E}{N-1}$$

Resolução 2

1.ª questão:

Entre duas vezes consecutivas em que Usain Bolt ultrapassa Telma ela percorre sempre a mesma distância D (*consegue ver porquê?*): aquela de que andamos à procura.

Quando Bolt termina a quinta volta Telma termina a primeira.

Nesse instante ela andou tantos D's quantas as vezes em que foi ultrapassada por Bolt.

Agora só tem de contar as ultrapassagens.

A primeira foi na segunda volta de Bolt e a última na quinta sobre a linha de partida: quatro ao todo.

Então Telma andou D quatro vezes quando terminou uma volta logo D é um quarto do comprimento da pista…

2.ª questão:

Se Bolt desse N voltas ao estádio enquanto a Telma dá uma então:

i) Se $N > 1$ quando Bolt terminasse a enésima volta a Telma terminaria a primeira.

O número de ultrapassagens seria N-1. A Telma teria andado D N-1 vezes quando terminou uma volta logo D seria um 1/N-1 do estádio.

ii) Se $N = 1$ a Telma conseguiria acompanhar Bolt lado a lado!

Resolução 3

Finalmente uma resolução de extrema simplicidade.

1.ª questão

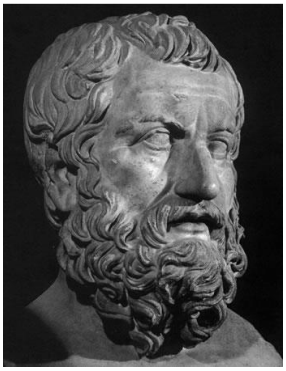
Bolt e Telma cruzam-se pela primeira vez quando este percorreu uma distância D.

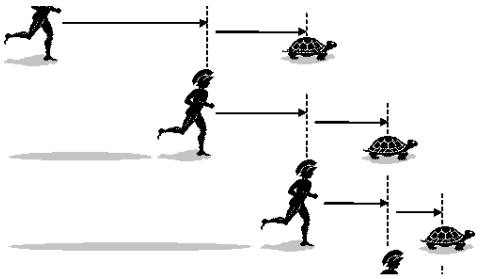
Nesse instante Bolt, que anda cinco vezes mais depressa, percorreu $5 \times D$ (1). Mas sabemos que esses $5D$ são uma pista, E, mais D. Logo E é 4 D e $D = \frac{E}{4}$

2.ª questão

Basta, em (1), substituir 5 por$N$.

O Paradoxo de Aquiles e da Tartaruga





Foi proposto por Zenão de Elea, na Antiga Grécia, cerca de 490 AC.

Aquiles, um herói grego, tentava alcançar uma tartaruga que estava a uma certa distância dele. Zenão argumentava da forma seguinte: quando Aquiles chegar à posição P_0 em que a tartaruga se encontrava quando ele começou a correr já a tartaruga se deslocou um pouco para uma nova posição P_1. Quando Aquiles atingir P_1 já a tartaruga estará em P_2.

Este processo repete-se indefinidamente no tempo pelo que Aquiles nunca atingirá a tartaruga!