Problema 3: Resolução

i) Fazemos a prova por Redução ao Absurdo (sobre este método de prova pode consultar o nosso Problema 3 de Maio de 2012).

Se $x_m = \frac{9}{4\sqrt{7}}$ fosse o quociente de dois inteiros positivos, isto é um número racional, então também $\sqrt{7}$ o seria e poderíamos escrever $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$ com m e n inteiros positivos e sem fatores primos comuns, isto é, $\frac{m}{n}$ irredutível (se houvesse fatores comuns cortavam…).

Então $m^2 = 7n^2$ e 7 seria um dos fatores primos de m^2 logo de m.

Logo $m = 7k$, com k inteiro, e $(7k)^2 = 7n^2$ equivalente a $7k^2 = n^2$ e 7 dividiria m e n.

Mas nós supusemos que $\frac{m}{n}$ era irredutível.

ii) Se a dízima fosse periódica então:

$$x_m = 0, a_{1 \dots} a_N (p_{1 \dots} p_K)$$

Escrevendo: $P = p_{1 \dots} p_K$ seria:

$$x_m = 0, a_{1 \dots} a_N + P \times 10^{-(N+K)} + P \times 10^{-(N+2K)} + P \times 10^{-(N+3K)} + \cdots =$$

$$= 0, a_1 \dots a_N + \frac{P}{10^N} \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-iK} \text{ [1]} = \frac{a_{1 \dots} a_N}{10^N} + \frac{P}{10^N} \frac{1}{10^K - 1}$$

isto é, o quociente de dois inteiros.

[1] Trata-se de uma série geométrica de razão 10^{-K} cuja soma é o $lim_{M \to \infty} \sum_{i=1}^{M} 10^{-iK}$

Desafios:

i) O leitor viu que quando um número não é quociente de dois inteiros a dízima que o representa não tem um período.

Ou seja os números irracionais são representados por dízimas não periódicas.

E se for o quociente de dois inteiros a dízima que o representa poderá não tem um período?

***Sugestão**: pense no algoritmo da divisão.*

ii) No artigo de Julho da rubrica "(U)Ma Temática Elementar" o leitor apercebeu-se que o mesmo racional pode ser representado por duas dízimas periódicas distintas.

Agora desafiamos o leitor a dizer se, admitindo que uma dízima só pode ter um zero à esquerda se este for imediatamente seguido da vírgula, o mesmo número irracional pode ser representado por duas dízimas distintas.

E, já agora, a justificar a sua resposta.

NOTA FINAL

Para conhecer mais sobre a representação dos reais por dízimas, mas neste caso na base dois, pode ler o nosso artigo de Novembro de 2014 ***aqui***.