Um outro método para construir uma elipse

1. A equação de uma elipse na forma canónica:

Vimos no último artigo que uma curva no plano é uma elipse se e só se existirem dois pontos F1 e F2, chamados focos, tais que a soma das distâncias de qualquer ponto da curva aos focos é constante, suponhamos igual a d, ou seja a elipse é o conjunto:

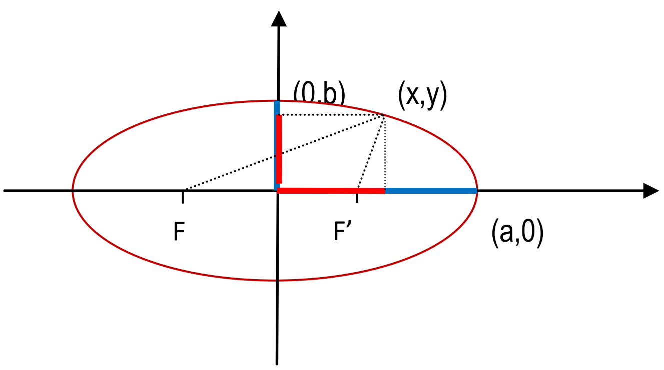
$$E = \{P \in Plano: d(P, F_1) + d(P, F_2) = d\}$$

Num referencial cartesiano ortonormado (eixos ortogonais e em que o segmento unitário tem o mesmo comprimento em ambos os eixos) se colocarmos os focos em pontos do eixo dos xx's simétricos em relação à origem a condição $d(P, F_1) + d(P, F_2) = d$ escreve-se, designando por (x,y) as coordenadas do ponto corrente da elipse e por (f,0) e (-f,0) as coordenadas dos focos, $\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = d$.

Eliminando as raízes nesta igualdade obtemos uma condição equivalente chamada ***a equação da elipse na forma canónica***:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

onde $a = \frac{d}{2}$ e $b = \sqrt{a^2 - f^2}$ são os comprimentos dos semieixos da elipse.



2. O método de construção

Repare agora que se θ for um ângulo entre 0 e 2π o ponto P de coordenadas (a cosθ, b senθ)

(*ver figura abaixo*) satisfaz a equação e, por isso, pertence à elipse.

Isto sugere uma segunda forma de construir a elipse:

i) Desenhe duas circunferências concêntricas de raios a e b.

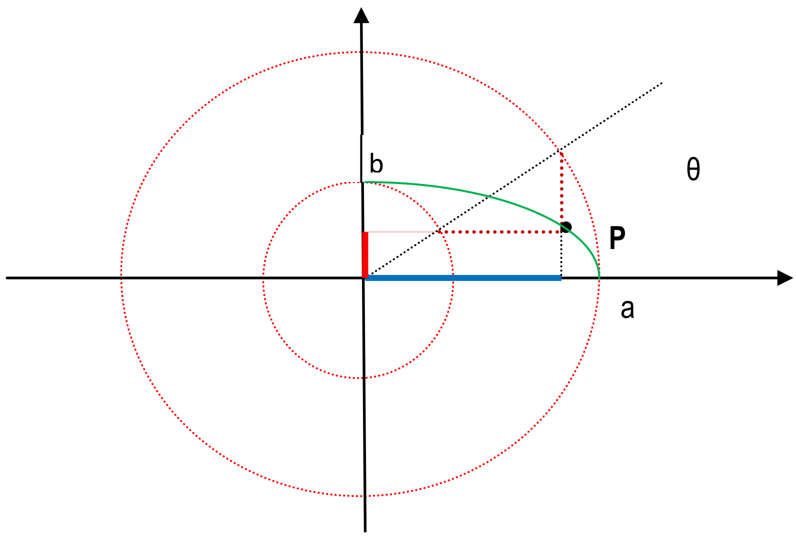
ii) Imagine uma semirreta com origem em O, e fazendo um ângulo θ com a parte positiva do eixo dos xx's, a rodar de 2π em torno da origem.

iii) Em cada posição, tire uma paralela ao eixo dos xx's pela intersecção com a circunferência de raio b e uma paralela ao eixo dos yy's pela intersecção com a circunferência de raio a.

iv) Chamando P ao ponto intersecção das duas paralelas as suas coordenadas são, como facilmente se reconhece:

$x = acos\theta$ (*a azul*) e $y = bsen\theta$ (*a vermelho*)

Substituindo estes valores na equação canónica a igualdade verifica-se e portanto o ponto está na elipse.



3. Um desafio

Conceber um instrumento capaz de desenhar uma elipse usando este processo.
E depois construí-lo.

4. Nota final

Lembramos que está aberto um concurso para premiar os três melhores traçadores de elipses baseados no método exposto no último artigo.