

Introdução

Relembramos que esta sequência de artigos sobre cardinalidade visa disponibilizar, para alunos interessados do Ensino Secundário, algumas noções e resultados que não são lecionados nem nesse nível de ensino, por não constarem do programa, nem no Ensino Superior, aqui por falta de tempo, mas que são indispensáveis a uma boa compreensão dos conteúdos universitários.

Um desses resultados é o Teorema que estabelece que o Conjunto dos Números Reais é não numerável.

No seu célebre livro *Apologia de um Matemático (da Gradiva à venda no [site da SPM](#))* o matemático inglês G. H. Hardy considera-o um daqueles que poderia apresentar como sendo de uma beleza indiscutível e como contendo matemática digna de um verdadeiro profissional de Matemática apesar de ser essencialmente muito simples.

Tentaremos apresentá-lo de forma atraente e desafiante de forma a prender o interesse de alunos com interesse pela disciplina.

A Estratégia da Demonstração

Esta é a sequência de etapas que vamos percorrer até obter o resultado:

- i) Começamos por dar a conhecer o conjunto dos Números Reais;
- ii) Mostramos que o conjunto das sucessões de termos em $\{0,1\}^1$ e o subconjunto C deste constituído pelas sucessões cujos termos não são iguais a 1 a partir de uma certa ordem têm a mesma cardinalidade;
- iii) Estabelecemos uma bijeção entre C e o intervalo $[0,1[$;
- iv) Indicamos uma bijeção entre $[0,1[$ e \mathbb{R} .

E obteremos uma representação binária para os reais.

Este mês apenas percorremos apenas a etapa i).

O conjunto dos Números Reais

Já lidou muitas vezes com números reais.

Sabe que é possível adicioná-los e conhece as propriedades da adição, sabe que é possível multiplicá-los e conhece as propriedades da multiplicação e conhece ainda a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Também conhece a relação de ordem menor ($<$) que permite ordenar os reais numa cadeia única. E sabe que esta relação de ordem está relacionada com a adição e a multiplicação por duas propriedades:

- i) Se $x < y$ então $x+z < y+z$ para qualquer z ;
- ii) Se $0 < x$ e $0 < y$ então $0 < x.y$

¹ Lembra-se que mostrámos que este conjunto é não numerável: ver [Para além do Aleph_0](#)

Poderá agora perguntar: será que a existência de uma adição, multiplicação e relação de ordem com as propriedades indicadas chega para caracterizar \mathbb{R} ?

A resposta é não: **os racionais** têm toda esta estrutura e contudo **não são os Reais**.

Lembra-se com certeza que mostrámos aqui que o conjunto \mathbb{Q} dos racionais é numerável : [ver neste link](#).

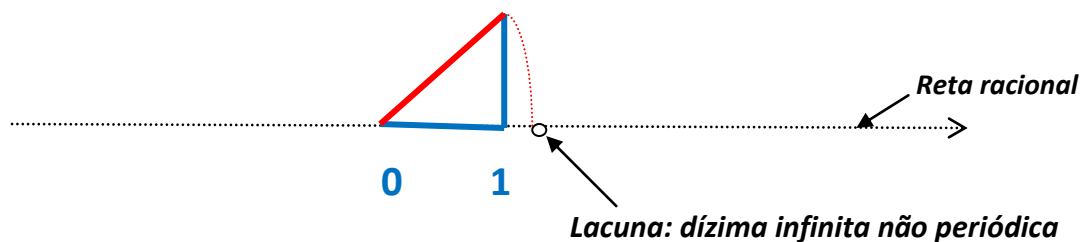
Assim se \mathbb{R} é não numerável é porque goza de alguma propriedade que não se verifica em \mathbb{Q} .

De fato durante muitos anos pensou-se que os racionais eram suficientes para medir qualquer quantidade ou segmento, isto é, pensou-se que escolhida uma unidade e dado um segmento era possível partir a unidade em n partes iguais de forma a que uma delas coubesse um número m finito de vezes no segmento: assim o comprimento do segmento seria $\frac{m}{n}$.

Até que na Antiga Grécia se demonstrou que se a unidade fosse o cateto de um triângulo retângulo isósceles e o segmento a hipotenusa tal não era possível (*Ver demonstração no Apêndice I*).

Na altura foi tal a estupefação que o comprimento da hipotenusa foi considerado uma quantidade irracional...

Atualmente estes **irracionais** também se designam por **lacunas da reta racional**.



Para dar ideia de uma técnica que pode ser usada para preencher estas lacunas pense que um irracional é representado por uma dízima infinita não periódica.

Assim $\sqrt{2} = 1,41421356237309\dots$

Se construir a sucessão de racionais indicada a seguir, que dá aproximações da raiz cada vez melhores:

1; 1,4; 1,41; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135;

nota que se trata de uma sucessão crescente, limitada de racionais que não tem limite em \mathbb{Q} . O limite seria $\sqrt{2}$ que não é racional: é uma lacuna da reta racional.

Isto sugere que os irracionais são as quantidades, não racionais, para que tendem as sucessões de racionais crescentes e limitadas sem limite em \mathbb{Q} .

Se acrescentarmos então, na definição de \mathbb{R} , o axioma:

“Toda a sucessão crescente e limitada tem limite”

conseguimos preencher todas as lacunas que encontrámos em \mathbb{Q} .

Com esta propriedade fica definido o Conjunto dos Reais de forma “única”.

Pode mudar o aspeto dos elementos (dígitos, pontos de uma reta, etc...) mas o conjunto é de fato o mesmo.

Pois é este conjunto que vamos mostrar, nos próximos artigos, que é não numerável.

NOTA - Para conhecer os axiomas de definição de forma mais formal ver **Apêndice II**.

Apêndice I

Procederemos por **redução ao absurdo** (ver Resolução do [Problema 3 de Maio](#)).

Supomos que existem m e n naturais, sem fatores comuns ou seja tais que $\frac{m}{n}$ é irredutível, que verificam a igualdade $(\frac{m}{n})^2 = 2$, ou seja,

$$m^2 = 2n^2 \quad (1)$$

Então m^2 , e por isso m , é par. Portanto n é ímpar.

Então $m = 2\dot{m}$ e $n = \dot{n} + 1$ (ver nota)².

Substituindo em (1) e desenvolvendo os quadrados vem:

$$2\dot{m} \times 2\dot{m} = 2 \times (\dot{n} + 1)^2 \quad \text{ou} \quad 4\dot{m}^2 = 4\dot{n}^2 + 4\dot{n} + 2$$

o que é absurdo.

Apêndice II

\mathbb{R} é um conjunto

- i) Com operações adição (+) e multiplicação (\times) tais que:

$(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ são grupos comutativos

e a multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z \quad \text{quaisquer que sejam } x, y \text{ e } z$$

- ii) Com uma relação de ordem total $<$ com as propriedades:

Se $x < y$ então $x+z < y+z$ para qualquer z ;

Se $0 < x$ e $0 < y$ então $0 < x \cdot y$

- iii) Onde toda a sucessão crescente e limitada tem limite.

² A notação \dot{n} designa um múltiplo inteiro de n .