Cónicas – A hipérbole (I)   por José Veiga de Faria

O que é uma hipérbole

Uma curva no plano é uma hipérbole se e só se existirem dois pontos F1 e F2, chamados focos, tais que o módulo da diferença das distâncias de qualquer ponto da curva aos focos é constante, suponhamos igual a d, ou seja a hipérbole é o conjunto*:*

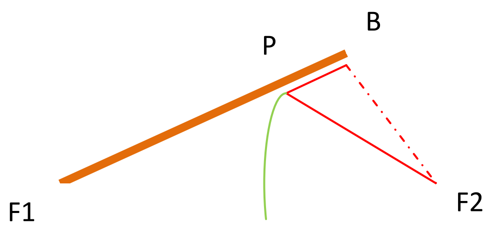
$$H = \{P \in Plano: |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = d\}$$

Desta propriedade deduz-se um método simples para construir uma hipérbole:

i) Escolhemos uma haste rígida de comprimento L (*a castanho*) livre de girar em torno de um ponto F_1 ao qual ligamos uma das suas extremidades e que será um dos focos da hipérbole (*ver figura abaixo*);

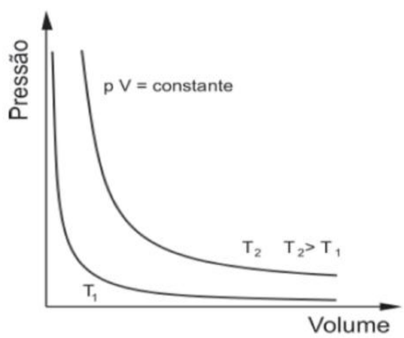
ii) Ligamos um fio (*a vermelho*) de comprimento *L- d à extremidade livre da haste e a outra extremidade do mesmo ao segundo foco* F_2*;*

iii) Com um lápis comprimimos o fio contra a haste mantendo este esticado (*posição P*) e fazemo-lo deslizar : vai desenhar um arco de hipérbole (*a verde*).



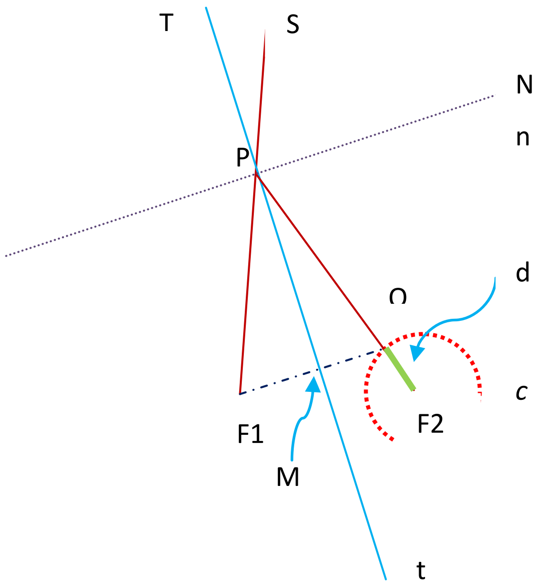
Note que de facto: $\overline{PF_1} = L - \overline{PB}$, $\overline{PF_2} = L - d - \overline{PB}$ e, portanto, $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = d$

Os alunos do secundário já conhecem funções cujos gráficos são hipérboles: as funções definidas por expressões da forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ com $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.



Uma extraordinária propriedade das hipérboles

Suponhamos que os focos de uma hipérbole são F1 e F2 e P é um ponto dessa hipérbole (*ver figura abaixo*).



Tracemos a circunferência c de centro em F_2 e raio d (*módulo da diferença das distâncias de qualquer ponto da curva aos focos).* Designando por Q a intersecção do segmento $[PF_2]$ com c é $\overline{PF_1}$=$\overline{PQ}$ e, portanto P pertence à mediatriz t de $[F_1Q]$.

De modo análogo se reconhece que dado Q pertencente à circunferência de centro em F_2 e raio d o ponto P intersecção da mediatriz t de $[F_1Q]$ com $[F_2Q]$, se existir, pertence à hipérbole.

Repare que isto fornece um método de desenhar uma hipérbole distinto do que vimos acima e a que nos referiremos no fim deste artigo.

De momento estamos interessados em saber o que aconteceria a um raio de luz disparado em direção a F_1 se tocasse a nossa hipérbole em P e esta fosse uma linha reflectora.

Designemos por M a intersecção de $[F_1, F_2]$ com t,

Começamos por notar que como é $\sphericalangle F_1PM = \sphericalangle MPF_2$ e como os ângulos $\sphericalangle F_1PM$ e $\sphericalangle SPT$ são verticalmente opostos e portanto iguais $\sphericalangle MPF_2 = \sphericalangle SPT$.

Sendo n perpendicular a t, e estando N sobre n então, $\sphericalangle NPS = \sphericalangle NPQ$.

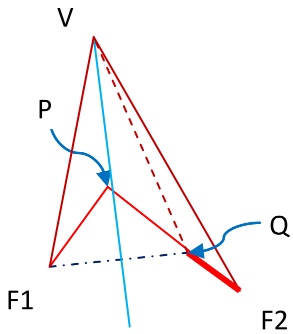
Se tomarmos a recta t como linha reflectora o raio reflecte-se passando por F_2.

Mas nós sabemos que quando um raio incide sobre uma hipérbole num ponto ele se reflecte como se incidisse sobre a tangente à hipérbole nesse ponto.

Assim se mostrarmos que t é a tangente à hipérbole de focos F_1e F_2 ficamos a saber que um raio de luz disparado em direção a um dos focos se reflecte passando pelo outro.

Mas uma recta é tangente a um ramo de uma hipérbole se e só se um dos seus pontos P pertence a esse ramo e os outros estão do mesmo lado do ramo (*fazemos notar ao leitor que existe uma única reta nestas condições; sugerimos a demonstração como um desafio aos mais interessados: podem inspirar-se na sugestão que deixámos no artigo de Fevereiro sobre a elipse*).

Podemos saber se os pontos estão entre os dois ramos da hipérbole pois para estes, e só para estes, o módulo da diferença das distâncias aos focos é menor do que *d* (*ver Anexo no fim deste artigo*).



Suponhamos então que P está sobre um dos ramos da hipérbole (*ver figura acima*) e V sobre a mediatriz t de $[F_1Q]$ onde Q dista *d* de F_2.

O módulo da diferença das distâncias de V aos focos é $\overline{VF_2}$-$\overline{VF_1}$.

Do triângulo ΔVQF_2 concluímos que $\overline{VF_2} < \overline{VQ} + d = \overline{VF_1} + d$ logo $\overline{VF_2}$-$\overline{VF_1} < d$.

Se V pertencesse à outra semirreta com origem em P de modo análogo demonstraríamos que o módulo da diferença das distâncias de V aos focos seria inferior a *d* (*convidamos o leitor interessado a fazer a prova*).

A recta t é pois a tangente à hipérbole em P.

Assim, se em direção a um dos focos lançarmos um raio de luz "contra a hipérbole" ele reflete-se passando pelo outro foco.

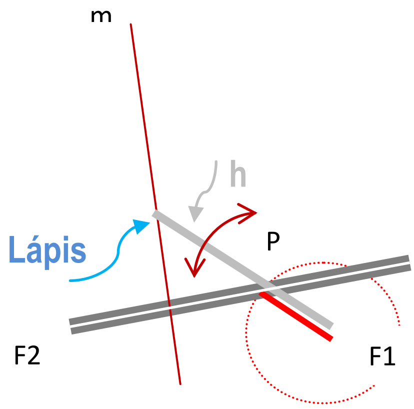
No Pavilhão do Conhecimento existe um bilhar hiperbólico: tem um buraco num dos focos da hipérbole e uma pinta branca na madeira no lugar do outro foco. Uma bola lançada sem efeito em direção à margem hiperbólica apontada à "pinta branca" vai cair no buraco.

Vale bem a pena dar uma saltada até lá e experimentar.

Construir um traçador de hipérboles

Com base no segundo método descrito neste artigo podemos construir um ***traçador de hipérboles***. Basta arranjar uma haste *h* (*ver figura*) que roda em torno de um dos seus extremos F_1 (será um dos focos) fixar-lhe um pino numa posição P que diste desse extremo um valor igual à diferença das distâncias aos focos e ligar esse pino a outro ponto F_2 que será o outro foco (a ligação deverá ser feita de forma articulada podendo P deslocar-se numa ranhura ou calha pois a distância a F_2 vai variar). A mediatriz *m* do segmento cujos extremos são B e F_2 intersecta a haste *h* num ponto da hipérbole: é a ele que se deve ligar o lápis que traça a linha. Note que quando *h* é paralela à mediatriz não há intersecção: *h* tem a direção de uma assimptota.

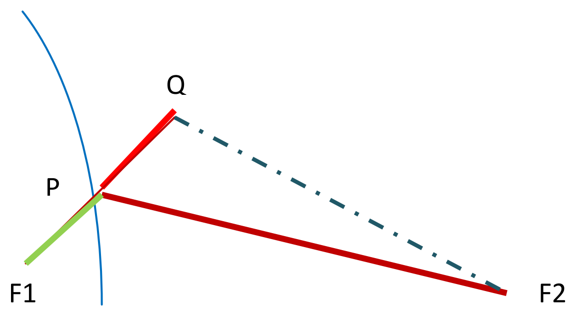
Desafiámo-lo a descobrir uma forma mecânica de fazer deslocar *m* na ranhura mantendo a perpendicularidade a $\overline{PF_2}$ e a equidistância a P e F2.



Anexo

Deixamos a prova de que se dois pontos estão situados entre os dois ramos de uma hipérbole os módulos das diferenças das distâncias aos focos são menores do que *d*.

Dado um ponto Q entre os dois ramos, designemos por P a intersecção da reta que une Q ao foco mais perto com o ramo da hipérbole (*ver figura abaixo).*



Como $\overline{QF_2} < \overline{PQ} + \overline{PF_2}$ é :

$$\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < \overline{PQ} + \overline{PF_2} - \overline{QF_1} = \overline{PQ} + \overline{PF_2} - (\overline{PQ} + \overline{PF_1}) = \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = d$$

Se fizer uma demonstração análoga pode concluir que, para pontos que não estão entre os ramos da hipérbole, os módulos das diferenças das distâncias aos focos são maiores do que *d*.