

Pressupostos

Supomos que conhece a noção de limite de uma sucessão, que sabe que toda a sucessão monótona limitada é convergente (ver [artigo de Janeiro](#)) e que, se para todo o n natural $a_n \leq c$, então $\lim a_n \leq c$.

São conhecimentos ao alcance de um aluno do secundário.

O intervalo $[0,1[$ é não numerável

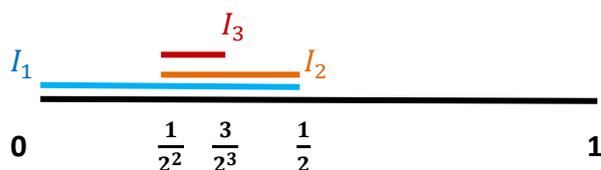
Começamos por construir uma aplicação bijetiva φ do conjunto das sucessões com termos em $\{0,1\}$, e que não são a partir de uma certa ordem iguais a 1, que designaremos por S , no intervalo $[0,1[$: $\varphi: S \rightarrow [0,1[$

A cada sucessão a_n em S associamos uma sucessão de intervalos¹ I_n da forma sugerida no artigo anterior, a saber:

Se $a_1 = 0$ então $I_1 = [0, \frac{1}{2}[$; se $a_1 = 1$ então $I_1 = [\frac{1}{2}, 1[$.

Agora, para obter I_2 a partir de I_1 , partimos I_1 em dois intervalos semifechados à esquerda e de igual comprimento e escolho o inferior se $a_2 = 0$ e o superior se $a_2 = 1$ como se sugere na figura abaixo. E assim por diante...

$a_n \rightarrow 0,1,0,\dots$



NOTA - Por recorrência podemos definir esta sucessão deste modo:

i) $I_1 = [0, \frac{1}{2}[$ se $a_1 = 0$; $I_1 = [\frac{1}{2}, 1[$ se $a_1 = 1$;

ii) Sendo $I_n = [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[$ com $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ então:

$$I_{n+1} = [\frac{2(i-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}[\text{ se } a_n = 0 \quad \text{e} \quad I_{n+1} = [\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}[\text{ se } a_n = 1.$$

¹ Trata-se de construir um “túnel” cuja largura tende para zero e que nos conduz a um ponto x de $[0,1[$.

Os intervalos I_n verificam:

P1: O comprimento de I_n é $c(I_n) = \frac{1}{2^n}$ logo $\lim c(I_n) = 0$;

P2: $I_{n+1} \subset I_n$.

Vamos agora ver que $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ é um conjunto singular: com um só ponto de $[0,1[$.

I não pode ter mais de um ponto

Resulta imediatamente de P1. De fato, dados dois quaisquer pontos distintos, a partir de uma certa ordem o comprimento dos intervalos I_n será inferior à distância entre eles e por isso não podem residir ambos em I_n .

I tem de fato um ponto

Escrevendo $I_n = [x_n, y_n[$ de P2 resulta que x_n será crescente e limitada e por isso é convergente. Pondo $x = \lim x_n$ então $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ como vamos ver.

Que x é superior ou igual a todos os x_n resulta de x_n ser crescente.

Como para todo n natural $x_n \leq y_n$ é $x \leq y_n$ qualquer que seja o n em \mathbb{N} .

Mas para todo o $N \in \mathbb{N}$ x é inferior a y_N . De fato como a_n não é igual a 1 a partir de N existirá um p superior a N para o qual $a_p = 0$ e então $x \leq y_p < y_{p-1} \leq y_N$.

Então $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

O ponto de I é de $[0,1[$

Como pertence a uma interseção de intervalos contidos em $[0,1[$ pertence a $[0,1[$.

Estamos agora em condições de definir φ : $\varphi(a_n) = x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Resta-nos mostrar que φ é biunívoca e sobrejetiva.

a) φ é biunívoca²:

Se a_n e b_n pertencem a S e as sucessões são diferentes então para algum N é $a_N \neq b_N$: um é zero e o outro é 1.

Mas então para o índice $N+1$ os intervalos I_{N+1} associados a cada uma das sucessões serão disjuntos logo as suas intersecções serão disjuntas e portanto $\varphi(a_n) \neq \varphi(b_n)$.

² Significa que se no desenho deslocarmos uma das barras coloridas, obviamente temos que deslocar todas as que estão por cima, o nosso “túnel” conduz-nos a um ponto diferente.

b) φ é sobrejetiva³:

Dado $x \in [0,1[$ construo a_n como foi indicado no artigo anterior, a saber:

$$a_1 = 0 \text{ se } x \in [0, \frac{1}{2}[; \quad a_1 = 1 \text{ se } x \in [\frac{1}{2}, 1[.$$

E agora para cada n se x está no intervalo $I_n = [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[$ faço $a_{n+1} = 0$ se estiver no semi-intervalo inferior e $a_{n+1} = 1$ se estiver no semi-intervalo superior.

Então $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ logo $x = \varphi(a_n)$.

Finalmente para mostrar que $[0,1[$ não é numerável usamos o teorema seguinte cuja demonstração pode ver no **Apêndice**:

Teorema: Se A contém um conjunto numerável e B é finito ou numerável A e $A \cup B$ têm a mesma cardinalidade.

$[0,1[$ é não numerável

S contém um conjunto numerável (por exemplo $\{1000 \dots, 01000 \dots, 00100 \dots, \dots\}$)

Deixamos como desafio para o leitor mostrar que o conjunto K das sucessões com termos em $\{0,1\}$, e que são a partir de uma certa ordem iguais a 1, é numerável.

Então S e $K \cup S$ são da mesma cardinalidade.

Mas $K \cup S$ é o conjunto das sucessões com termos em $\{0,1\}$ que é equicardinal ao conjunto das partes de \mathbb{N} que por sua vez é não numerável (ver [artigo de Dezembro](#)).

\mathbb{R} é não numerável

O teorema indicado permite facilmente concluir que os intervalos $[0,1[$ e $]0,1[$ são equicardinais.

A aplicação $f:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(x) = \text{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))$ é uma bijeção.

Então: \mathbb{R} é não numerável: $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathbb{R})$.

Representação binária dos Reais

A aplicação inversa de φ fornece uma representação binária para os reais entre zero e um. Como sabemos representar qualquer inteiro na base 2 temos uma representação para qualquer real na base 2.

No próximo mês trataremos este tema ilustrando com alguns exemplos. E obteremos facilmente a cardinalidade de \mathbb{R}^n .

³ Significa que, para todo o ponto x de $[0,1[$, há uma forma de dispor as barras de forma a obter um “túnel” que conduz a esse ponto.

Apêndice

Teorema: *Se A contém um conjunto C numerável e B é finito ou numerável então A e $A \cup B$ têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração:

$B \cup C$ é numerável logo existe $\psi: C \rightarrow B \cup C$ bijetiva.

Então $\phi: A \rightarrow A \cup B$ tal que $\phi(x) = x$ se $x \notin C$ e $\phi(x) = \psi(x)$ se $x \in C$ é uma bijeção.