Problema 3: Resolução

Para provar que não existe, num dado conjunto, um objeto que verifica uma certa propriedade podemos:

i) Supor que existe um e mostrar que isso leva a uma contradição, ou seja, a que uma proposição seja verdadeira e falsa.
 Trata-se do célebre método de prova por "***redução ao absurdo***" que consiste em acrescentar provisoriamente uma proposição aos axiomas da teoria e demonstrar que isso leva a uma contradição ou seja a que uma proposição seja simultânea - mente verdadeira e falsa.
 Um grande matemático comparou este método ao gambito num jogo (o xadrez por exemplo). Um gambito consiste em ceder posições (sacrificar uma peça por exemplo) para obter de seguida uma vantagem significativa.
 Pois bem na redução ao absurdo cedemos o jogo todo (admitimos como falsa a proposição que queremos provar como verdadeira) para de seguida ganharmos a partida (afinal a proposição é verdadeira).

ii) Mostrar que todos os elementos do conjunto não verificam a referida propriedade.

Apresentamos dois problemas e vamos resolver o primeiro pelo primeiro método e o segundo pelo segundo.

Problema 1

Suponhamos então que conseguíamos unir cada casa aos três pontos de abastecimento sem que os fios de ligação se cruzem: teríamos então um mapa no plano.

Vejamos quanta faces teria usando a fórmula de Euler.

Designando por F, V e A respetivamente o número de faces, vértices e arestas seria:

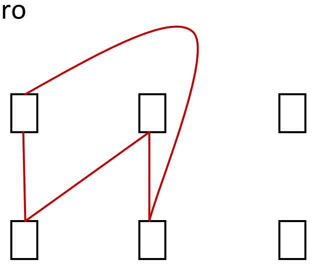
$V = 6$ (número de casas mais o número de pontos de abastecimento)

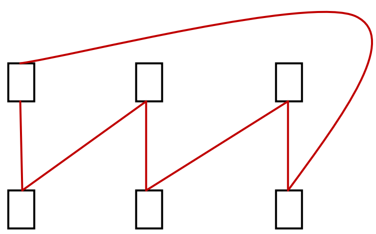
$A = 9$ (número de fios de ligação)

Então de $F + V = A + 2$ resulta $F = 5$.

Contemos agora quanta arestas pode ter cada face. Facilmente se conclui que só pode ter:

a) Quatro ou b) Seis





Então a cada uma das cinco faces só podemos atribuir 4 ou 6 arestas e como cada aresta é comum a duas faces os valores de A possíveis são:

$$\frac{4+4+4+4+4}{2};\frac{4+4+4+4+6}{2};\ldots\ldots\ldots;\frac{6+6+6+6+6}{2}$$

No primeiro caso seria A = 10 logo F = A + 2 – V= A + 2 – 6 = 6.

Nos restantes cinco casos F seria superior a 6 logo em qualquer dos casos superior a 5 que como vimos seria o número de faces.

E ganhamos a partida: xeque-mate.

Problema 2

Designemos por N um número natural tal que o algarismo das unidades de N^2 é 1.

Vamos mostrar que o algarismo das dezenas de N^2 não pode ser 1.

Como o algarismo das unidades de N^2 é 1 o algarismo das unidades de N só pode ser 1 ou 9.

No primeiro caso é $N = 10 \times k + 1$. Assim o algarismo das dezenas de N^2 seria o resto da divisão por 10 de $10 \times k^2 + 2 \times k$. Como a primeira parcela é um múltiplo de 10 e a segunda parcela é par esse algarismo seria par e portanto diferente de 1.

No segundo caso é $N = 10 \times k + 9$. Assim o algarismo das dezenas de N^2 seria o resto da divisão por 10 de $10 \times k^2 + 2 \times 9 \times k + 8$. Como a primeira parcela é um múltiplo de 10 e a segunda e a terceira parcelas são pares esse algarismo seria par e portanto diferente de 1.