

## **Introdução:**

*Este artigo foi aqui publicado em julho de 2012.*

*Como, entretanto, apareceram muitos novos leitores, e como nele constam apontadores para os artigos que escrevemos sobre cardinalidade e cônicas, e que, entretanto, foram melhorados e acrescentados, resolvemos reeditá-lo.*

*Deixamos ainda um desafio, no fim, para os alunos do secundário com Geometria Descritiva.*

## **Parte I: Votos para o futuro**

### **POR UMA ESCOLA RISONHA E FRANCA**



Numa peça de teatro dos anos trinta o grande ator Estêvão Amarante dizia ao entrar em cena:

**“No meu tempo a Escola era risonha e franca”.**

Será que ainda o é agora?

Se não é faça votos para que volte a sê-lo.

A reunião de professores e alunos à volta da aventura de compreender o mundo em que vivemos com o objetivo não só de o conhecer mas também de crescer como pessoas, alunos e professores, tem de ser uma experiência feliz.

Quem não gostaria de levar consigo, ao longo da vida, a recordação de uma Escola risonha e franca?

## Parte II: Balanço da rubrica

Escrevemos ao longo dos dois últimos anos (2011, 2012) alguns textos (nesta rubrica ou como apoio à resolução do [problema do Disco do Snr. Silva](#) dos primeiros meses de 2011) com o objetivo de ajudar os alunos que vão entrar no ensino universitário a colmatar lacunas que trazem do secundário e que, por falta de tempo, não são preenchidas em alguns cursos universitários, mas que são de grande importância para uma boa compreensão das matérias com que se vão deparar.

Deixamos links para esses textos com os votos de que despertem algum fascínio pela Matemática.

### i) **Cardinalidade**

Finito versus Infinito

[http://www.clube.spm.pt/files/outros/Integrando\\_02\\_2014\\_vf.pdf](http://www.clube.spm.pt/files/outros/Integrando_02_2014_vf.pdf)

O Aleph0

<http://www.clube.spm.pt/files/outros/jvf%20abril.pdf>

Os Paradoxos do Numerável

[http://www.clube.spm.pt/files/outros/jvf%20int%20Cardinalidade\\_do\\_numerave%20l.pdf](http://www.clube.spm.pt/files/outros/jvf%20int%20Cardinalidade_do_numerave%20l.pdf)

Para além do Aleph0

[http://www.clube.spm.pt/files/outros/Para\\_alem\\_do\\_Aleph0\\_v1.pd%20f\\_1.pdf](http://www.clube.spm.pt/files/outros/Para_alem_do_Aleph0_v1.pd%20f_1.pdf)

O Princípio de indução

<http://www.clube.spm.pt/files/outros/principioinducacao.pdf>

A cardinalidade do contínuo

<http://www.clube.spm.pt/files/outros/integrando%20A%20cardinalidade%20dos%20reais.pdf>

[http://www.clube.spm.pt/files/outros/A%20cardinalidade%20dos%20reais\\_II.pdf](http://www.clube.spm.pt/files/outros/A%20cardinalidade%20dos%20reais_II.pdf)

[http://www.clube.spm.pt/files/outros/A%20cardinalidade%20dos%20reais\\_02\\_v1.pdf](http://www.clube.spm.pt/files/outros/A%20cardinalidade%20dos%20reais_02_v1.pdf)

Uma representação binária para os reais

[http://www.clube.spm.pt/files/outros/jvf\\_2.pdf](http://www.clube.spm.pt/files/outros/jvf_2.pdf)

### ii) **Medida de Lebesgue: uma breve noção**

[http://www.clube.spm.pt/files/outros/Medida%20de%20Lebesgue\\_1.pdf](http://www.clube.spm.pt/files/outros/Medida%20de%20Lebesgue_1.pdf)

### iii) **Cónicas**

A elipse

<http://www.clube.spm.pt/files/outros/conicas.pdf>

<http://www.clube.spm.pt/files/outros/conicas%20ii.pdf>

A hipérbole

<http://www.clube.spm.pt/files/outros/intergrando%20.pdf>

<http://www.clube.spm.pt/files/outros/Hiperbole.pdf>

## Parte III: Cónicas – *Um truque de magia*

E queremos agora terminar esta série de artigos dedicados às cónicas com um daqueles golpes de magia que em Matemática tantas vezes tornam um problema que parece muito complexo em algo de extrema simplicidade.

E nos deixa maravilhados vislumbrando o dedo do Criador:

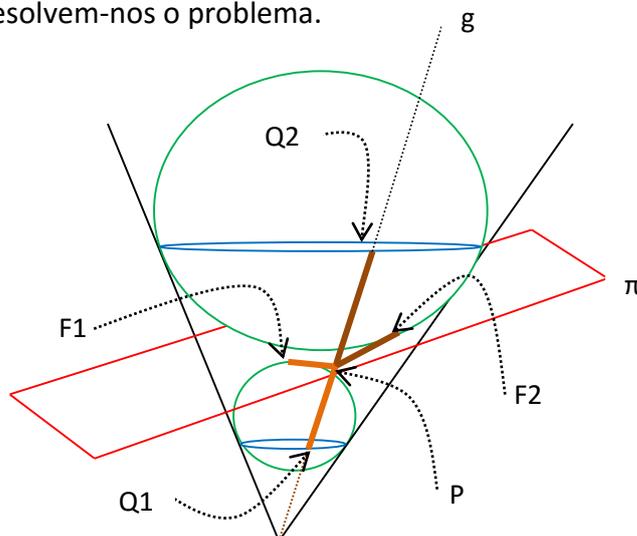


Sabemos que uma cónica é uma linha que resulta de intersectar um cone reto de diretriz circular por um plano. Podemos então interrogar-nos como é que, por exemplo, e no caso da elipse, há dois pontos no plano, os chamados focos, tais que a soma das distâncias dos pontos da linha a esses pontos é constante. Tente o leitor fazer um esforço para pelo menos discernir uma forma de encontrar os focos: vai ver que não parece fácil.

Pois bem a resposta é de extrema simplicidade.

Imagine duas esferas, uma de cada lado do plano, tangentes simultaneamente ao cone e ao plano: são as chamadas esferas de Dandelin.

**Pois os pontos de tangência das esferas ao plano são esses mesmos focos.** As esferas, como que por magia, resolvem-nos o problema.



E como podemos ver que de facto é assim?

Pois é fácil verificar que as intersecções das esferas com o cone são duas circunferências contidas em planos paralelos (a azul na figura).

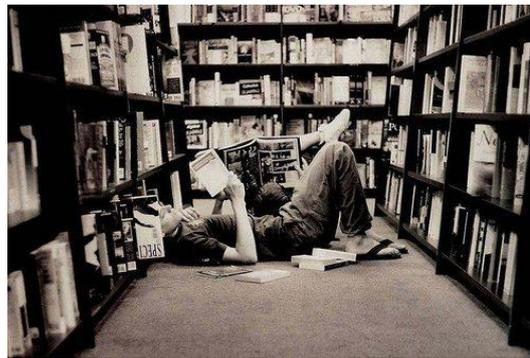
E é muito fácil provar que, se por um ponto exterior a uma esfera tirarmos duas retas tangentes a essa esfera, as distâncias do ponto aos pontos de tangência são iguais (tente fazer a prova).

Considere agora uma geratriz  $g$  do cone: a distância entre os pontos  $Q1$  e  $Q2$  em que  $g$  intersecta as circunferências referidas é constante: suponhamos igual a  $d$ . Chamando  $P$  à intersecção de  $g$  com o plano  $\pi$  e  $F1$  e  $F2$  aos pontos de tangência das esferas com  $\pi$  temos:  $[PF1]=[PQ1]$  e  $[PF2]=[PQ2]$ .

Logo:  $[PF1]+[PF2]=[PQ1]+[PQ2] = d$ .

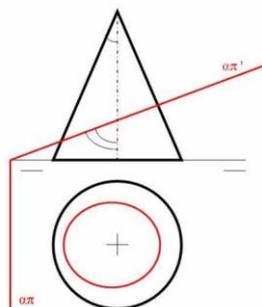
Desafiamos o leitor interessado a fazer uma demonstração análoga para a hipérbole.

Boa leitura.



## Desafio

Construa as projeções de um cone de revolução com o eixo vertical.



E construa também as projeções de um plano que o intersecta segundo uma elipse contida no primeiro quadrante.

Usando as esferas de Dandelin é capaz de obter as projeções dos focos da elipse? E as projeções dos eixos da elipse consegue desenhar?

E já agora obtenha as projeções de mais quatro pontos da elipse que lhe permitam desenhar as suas projeções de forma aproximada.