

Problema 1: Resolução

Primeira questão

NOTA – *Dedicamos esta resolução a alunos interessados do Ensino Básico.*

As primeiras dúvidas que te poderão surgir são:

- Que quantidade será $33,(3)$? O que querará dizer o três entre parênteses?

Ora esta é a notação que se usa para representar uma dízima infinita periódica: o período aparece entre parênteses e repete-se indefinidamente; neste caso

$$33,(3) = 33,33333333...$$

Estas dízimas podem ser representadas por frações inteiras.

Mas qual será fração que representa $33,33333...$?

Para a descobrir experimenta multiplicar por 3; obténs:

$$3 \times 33,3333 \dots = 99,9999 \dots = 99 + 0,9999 \dots$$

Mas tu sabes que $0,9999\dots$ é 1. Se não estás convencido/a, lê o excelente artigo do José Carlos Santos, autor da também excelente rubrica (U)Ma Temática Elementar, neste link:

<http://www.clube.spm.pt/arquivo/4024>

Então $3 \times 33,3333 \dots = 100$ e $33,3333\dots$ é um número que multiplicado por 3 dá 100, ou seja, é $\frac{100}{3}$.

O acréscimo de $33,(3)\%$ significa que em cada 100 euros há um incremento no custo de $\frac{100}{3}$ euros.

O custo é, por isso, aumentado em $\frac{1}{3}$ do seu valor.

Vamos, então, agora ler o problema com atenção e ver como podemos extrair do texto equações matemáticas.

Repara:

O Bernardo quer alugar bicicletas para as próximas quatro semanas. Conta andar meia hora por dia durante os vinte dias úteis e nos domingos e sete horas e meia em cada um dos quatro sábados. Escolheu a primeira opção e alugou x horas a bicicleta laranja e y horas da bicicleta azul.

Ao todo quer alugar:

$$6 \text{ dias} \times 4 \text{ semanas} \times 0,5 \text{ hora} + 1 \text{ dia} \times 4 \text{ semanas} \times 7,5 \text{ horas} = 40 \text{ horas}$$

A última frase permite-nos escrever a equação: $x + y = 40$

Repara agora nestes parágrafos:

A empresa Bykeshare aluga dois tipos de bicicletas: as bicicletas laranja, a três euros à hora, e as azuis, a seis euros por hora. Oferece também a opção de o cliente pagar a cinco euros e meio por hora podendo escolher livremente os tempos para cada um dos dois tipos de bicicleta.

Se tivesse optado pela segunda opção, e para os mesmos valores de x e y , teria gasto mais 33,(3)%.

Podes ver que o que ele gastou, escolhendo a opção 1, foi $3x + 6y$

Se tivesse escolhido a opção 2 teria gasto $5,5 \times (x + y)$.

Mas este valor é o primeiro mais um terço do primeiro logo:

$$(3x + 6y) \times \frac{4}{3} = 5,5 \times (x + y)$$

Então temos um sistema linear de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ (3x + 6y) \times \frac{4}{3} = 5,5 \times (x + y) \end{cases}$$

Na forma canónica: $\begin{cases} x + y = 40 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$

Repara que a primeira equação representa uma recta paralela à bissectriz dos quadrantes pares e a outra uma recta que passa pela origem.

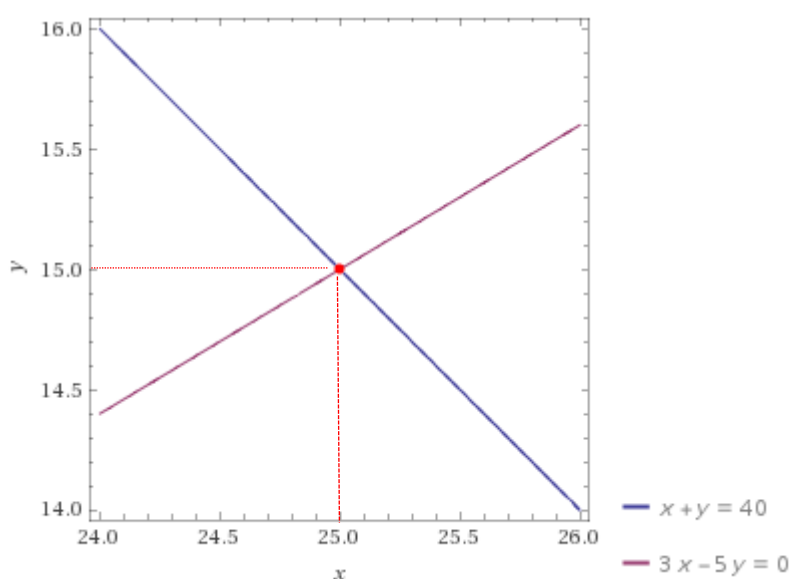
São concorrentes, têm declives diferentes, e na sua intersecção está a solução do problema.

Podes, portanto, resolver o problema geometricamente.

Eu recorri ao excelente Motor Computacional do Conhecimento WolframAlpha para a resolução gráfica.

Também podes fazê-lo: carregas neste link <https://www.wolframalpha.com/> e digitas, na caixa de entrada, $x+y=40$, $3x-5y=0$.

Obténs:



Também podes resolver o sistema à maneira de Gauss¹ (podes ver a sua biografia [aqui](#)):

Multiplicas a primeira equação por cinco e adicionas à segunda, para eliminar o y , e vem:

$$8x = 200 \text{ ou } x = 25$$

Claro que agora, como $x + y = 40$, $y = 15$

Se tiveres curiosidade em saber como foi descoberta a ligação entre resoluções geométricas e algébricas podes gostar de ver o nosso problema de Novembro de 2105 e a sua resolução [aqui](#).

Podes, ainda, ver no Apêndice final a resolução por este Método obtida no WolframAlpha.

Se quiseses entender os quadros que lá aparecem e a forma como evoluem em direção à solução pergunta aos teus professores, ou pais, ou envia-me um email para jvf.ClubeMat.SPM@gmail.com e eu enviar-te-ei uma explicação detalhada.

Segunda questão

NOTA - A segunda questão não será, com certeza, acessível à maioria dos alunos do Ensino Básico mas pode ser facilmente entendida por alunos do Secundário.

Bernardo tem de alugar a bicicleta azul em, pelo menos, um sábado: repara que nos restantes dias ele só anda 12 horas ($4 \text{ semanas} \times 6 \text{ dias} \times 0,5 \text{ horas}$) o que não perfaz as 15 horas de aluguer da bicicleta azul.

Se alugar em um único sábado pode escolher um dos quatro sábados e para cada um deles escolher entre os vinte e quatro “não sábados” os quinze em que vai alugar a bicicleta azul.

Ao todo: $4 \times \binom{24}{15} = 5.230.016$ ²

Se alugar em dois sábados perfaz as quinze horas e nos restantes dias usará a bicicleta laranja.

Pode escolher os dois sábados de $\binom{4}{2} = 6$ formas diferentes.

Ao todo o Bernardo pode planear 5.230.020 formas diferentes de usar os dois tipos de bicicleta.

¹ Karl Friedrich Gauss é considerado um dos três maiores matemáticos de todos os tempos e é o pai do Método de Eliminação de Gauss para a resolução de sistemas de equações lineares do qual damos aqui um pequeno cheiro.

² Lembra-te do Teorema Fundamental da Contagem?

Apêndice

Eliminação de Gauss em acção!

Solution:

Solve the following system:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$$

Express the system in matrix form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Write the system in augmented matrix form and use Gaussian elimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 40 \\ 3 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Swap row 1 with row 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 40 \end{array} \right)$$

Subtract $\frac{1}{3} \times (\text{row 1})$ from row 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 40 \end{array} \right)$$

Multiply row 2 by $\frac{3}{8}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

Add $5 \times (\text{row 2})$ to row 1:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 75 \\ 0 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

Divide row 1 by 3:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

Collect results:

Answer:

$$\begin{cases} x = 25 \\ y = 15 \end{cases}$$

Computed by Wolfram|Alpha