A cardinalidade dos Irracionais

Vimos (*no nosso artigo de Outubro onde pode ver a demonstração*) que se um conjunto A contém um conjunto C numerável e se B é numerável então A e AUB são equicardinais isto é existe uma bijeção de A sobre AUB.

Ora o conjunto I dos irracionais contém um conjunto numerável: por exemplo o conjunto C $= \{\sqrt{2} \times n : n \in \mathbb{N}_1\}$[1]

Como já vimos que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é numerável podemos concluir que $\mathrm{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ e I têm a mesma cardinalidade, ou seja os irracionais têm a mesma cardinalidade dos reais: a cardinalidade do contínuo.

A cardinalidade de $\mathbb{R}^n$

1. [0,1[e $[0,1[^2$ são equicardinais

Lembra-se que no artigo de Outubro construímos uma aplicação bijetiva φ do conjunto das sucessões com termos em {0,1}, e que não são a partir de uma certa ordem iguais a 1, que designámos por S, no intervalo [0,1[.

Vamos então definir uma aplicação ϒ biunívoca de S×S em S : a cada par ordenado de sucessões de S ($a_1 a_2 a_3$ … , $b_1 b_2 b_3$ …) associamos a sucessão $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$…

i) $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$…**pertence a S:** se não pertencesse os seus termos seriam iguais a 1 a partir de uma certa ordem e portanto as sucessões a_n e b_n não pertenceriam a S.

ii) ϒ é biunívoca: é quase imediato deixamos a prova como um pequeno desafio.
Desafio: *Deixamos ainda como desafio ao leitor provar que ϒ não é sobrejetiva.*

A aplicação ψ_1: $[0,1[^2$⟶[0,1[definida por ψ_1((φ(a_n), φ(b_n)))= φ($a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$…) é pois biunívoca atendendo a que φ é bijetiva.

Muito facilmente obtemos uma aplicação ψ_2 biunívoca de [0,1[em $[0,1[^2$.

Por exemplo: $\psi_2(x) = (x, 0)$.

Ora o teorema de Schroeder-Bernstein[2] garante que a existência de ψ_1 e ψ_2 implica a de ψ de $[0,1[^2$ *em* [0,1[bijetiva.

[1] Se $\sqrt{2} \times n$ fosse racional seria da forma $\frac{p}{q}$ com p e q naturais e $\sqrt{2}$ seria igual a $\frac{p}{nq}$ ou seja racional.

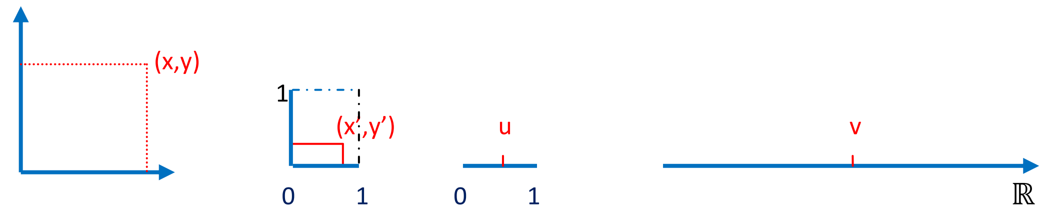
[2] Pode ver a demonstração no nosso artigo de Maio de 2011

2. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ têm a mesma cardinalidade

Como vimos que [0,1[e $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade existe $\emptyset$: [0,1[$\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ bijetiva; então θ: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por θ(x,y)= $\emptyset(\psi((\emptyset^{-1}(x), \emptyset^{-1}(y))))$ é uma bijeção.

Interpretação:

Em diagrama e pondo x'=$\emptyset^{-1}(x)$, y'=$\emptyset^{-1}(y)$, u = ψ(x',y') e v = $\emptyset$(u):



quando (x,y) "percorre" o plano sem repetir a mesma posição, (x',y') "percorre" $[0,1[^2$ sem repetir a mesma posição, u "percorre" o segmento [0,1[sem repetir a mesma posição e v "percorre" $\mathbb{R}$ sem repetir a mesma posição.

3. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ têm a mesma cardinalidade

Vamos recorrer ao **Princípio de Indução** de que falámos no artigo de Outubro e também no Problema 3 do mês de Abril de 2013.

Base de Indução: n=1

***Prova**: Acabámos de provar que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ têm a mesma cardinalidade*

Hipótese de Indução: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ têm a mesma cardinalidade

Tese: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ têm a mesma cardinalidade

Prova: *$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ e $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ têm obviamente a mesma cardinalidade.*

Por hipótese existe $\emptyset$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bijetiva.

Então ψ: $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por ψ(x,y) = ($\emptyset$(x),y) é bijetiva.

Como $\mathbb{R}^2$ tem a cardinalidade do contínuo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ tem a cardinalidade do contínuo.

NOTA FINAL:

Este é o último de uma sequência de artigos sobre cardinalidade que pode ver nos endereços que deixamos abaixo:

O aparecimento da noção de finito e infinito na mente humana

O mais pequeno dos conjuntos infinitos

Os paradoxos do numerável

Para além do Aleph_0

A cardinalidade dos Reais (I)

A cardinalidade dos Reais (II)

A cardinalidade dos Reais (III)

Uma representação binária para os Reais