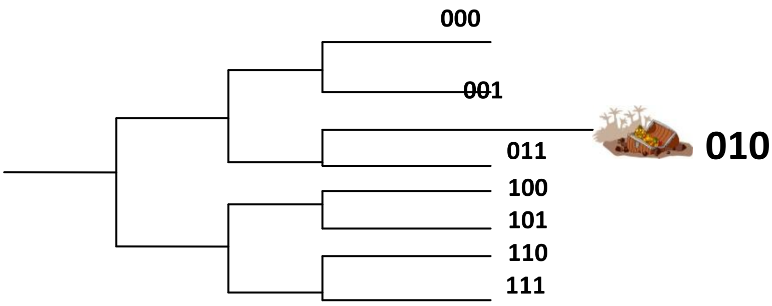
A cardinalidade dos reais

Pretendemos mostrar que $card(\wp(N)) = card(\mathbb{R})$

A ideia da demonstração

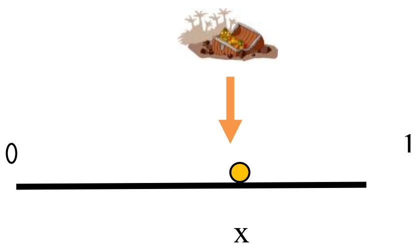
Imagine que é o Ali-Bábá e encontra o labirinto abaixo onde está escondido um tesouro. Sabe que só um percurso o conduz a ele e que todos os outros são sem regresso. Para se lançar na Caça ao Tesouro precisa de uma chave que indique, em cada bifurcação, se deve virar à direita ou à esquerda. Como poderá ser-lhe dada essa chave? Uma hipótese é uma sequência de zeros e uns onde 0 significa virar à esquerda e 1 à direita. Assim a chave seria neste caso : **010**.



Para mostrar que $\mathbb{R}$ e $\wp(N)$ têm a mesma cardinalidade ($\mathcal{C}$) começamos por provar

$[0\ 1[$ tem a cardinalidade $\mathcal{C}$.

Para isso vamos aproveitar a ideia que acabámos de expor. Agora o tesouro de que o Ali Bábá anda à procura vai ser um ponto desse intervalo e a chave uma sucessão cujos termos são 0 ou 1.



Vamos ver como interpretar a chave que indica o caminho até x.

Se x estiver no intervalo $[0\ \frac{1}{2}[$ o Ali-Bábá tem de virar à esquerda e o primeiro elemento da chave é 0; se x estiver no intervalo $[\frac{1}{2}\ 1[$ o Ali-Bábá tem de virar à direita e o primeiro elemento chave é 1. A seguir partimos o intervalo onde ele entrou em dois, semi-abertos à direita, de igual comprimento e escolhemos o segundo elemento da sequência : 0 se x estiver no intervalo inferior e 1 se estiver no superior. E assim sucessivamente de forma que a chave vai ser uma sucessão cujo conjunto dos termos vai estar contido no conjunto {0,1}.

Assim cada ponto vai ter uma chave.

Vamos ver que:

i) Todo o ponto tem uma única chave que conduz até ele;
ii) Pontos diferentes têm chaves diferentes;
iii) Há chaves que não conduzem a qualquer ponto: por exemplo a sequência cujos elementos são todos 1's.

Já é um pouco mais difícil provar que as que não conduzem a ponto nenhum são aquelas que são 1 a partir de uma certa ordem e só essas: mas vamos dar umas pistas adiante.

Se descartarmos estas do conjunto das chaves ficamos um conjunto K de chaves e uma bijecção dele em $[0\ 1[$.

Acontece que, como veremos, ao descartar o conjunto de chaves referido o conjunto com que ficamos tem a mesma cardinalidade do conjunto X de todas as chaves.

Ora este não é mais do que o conjunto das sucessões cujo conjunto dos termos está contido em {0,1}.

Por sua vez este é equicardinal ao conjunto $\wp(\aleph)$: uma sucessão destas define o conjunto dos naturais que são índice de um termo de valor 1.

Portanto sua cardinalidade é $\mathcal{C}$; logo $[0\ 1[$ tem cardinalidade $\mathcal{C}$.

Finalmente mostramos que $[0\ 1[$ e $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade.

A demonstração

Deixamos a demonstração como uma sequência de exercícios relativamente simples.

Ex_1: Sendo X o conjunto das sucessões cujo conjunto dos termos está contido no conjunto { 0, 1 } mostre que $\wp(\aleph)$ é equicardinal a X e logo:

$$car(\aleph) < card(\wp(\aleph)) = card(X).$$

Ex_2: Mostre que se A é um conjunto que contém um conjunto numerável K e B é um conjunto finito ou numerável (contável) então A e $A \cup B$ são equicardinais.

Sugestão: Note que K e $K \cup B$ são numeráveis logo existe uma bijecção de um no outro.

Ex_3: Mostre que $L = \{a_n : a_n = 1 \quad para \quad quase \quad todo \quad o \quad n\}$ é numerável.

Ex_4: Mostre que *K = X \ L e [0, 1[* são equicardinais.

Sugestão:

Dado x ∈ [0,1[construa, por recorrência, as sucessões $a_n, \quad p_n, \quad q_n$:

$$a_0 = 0, \quad p_0 = 0, \quad q_0 = \tfrac{1}{2} \quad se \quad x \in [0\ \tfrac{1}{2}[= I_0$$

$$a_0 = 1, \quad p_0 = \tfrac{1}{2}, \quad q_0 = 1 \quad se \quad x \in [\tfrac{1}{2}\ 1[= I_0$$

Interpretação:

Se x está no segmento vermelho viro à esquerda ($a_0 = 0$*) e entro nesse segmento:*

faço $p_0 = 0, \quad q_0 = \frac{1}{2}$.

Se x está no segmento azul viro à direita ($a_0 = 1$*) e entro nesse segmento:*

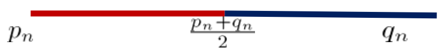
faço $p_0 = \frac{1}{2}, \quad q_0 = 1$

Sendo n natural:

$$a_{n+1} = 0 \quad p_{n+1} = p_n, \quad q_{n+1} = \tfrac{p_n + q_n}{2} \quad se \quad x \in [p_n\ \tfrac{p_n+q_n}{2}[= I_{n+1};$$

$$a_{n+1} = 1 \quad p_{n+1} = \tfrac{p_n + q_n}{2}, \quad q_{n+1} = q_n \quad se \quad x \in [\tfrac{p_n+q_n}{2}\ q_n[= I_{n+1}$$

Interpretação:



Tendo entrado no segmento $[p_n\ q_n[$ *se x está no segmento vermelho viro à esquerda (* $a_{n+1} = 0$*) e entro nesse segmento: faço* $p_{n+1} = p_n, \quad q_{n+1} = \frac{p_n+q_n}{2}$.

Se x está no segmento azul viro à direita ($a_{n+1} = 1$*) e entro nesse segmento:*

faço $p_{n+1} = \frac{p_n+q_n}{2}, \quad q_{n+1} = q_n$

a) *Prove que:* $\{x\} = \bigcap_{n\in \mathrm{N}} I_n = \{lim p_n\} = \{lim q_n\}$

b) *Pondo* $\psi(x) = a_n$ *mostre que para qualquer x em [0,1[* $\psi(x) \in K$

Sugestão*: mostre que* $a_n \in L \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n\in N} I_n = \varnothing$

c) *Mostre que* $\psi : [0\ 1[\longrightarrow K$ *é biunívoca*

d) *Mostre que* ψ *é sobrejectiva*

Sugestão*: mostre que* $a_n \in K \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n\in N} I_n \neq \varnothing$ *mostrando que*

$lim p_n \in \bigcap_{n\in \mathrm{N}} I_n$

Ex_5: Ficou provado que : $card(\wp(N) = card(X) = card(K) = card([0\ 1[$

Recorra agora ao exercício 2 para mostrar que $card([0\ 1[) = card(]0\ 1[)$

Ex_6: Mostre que $card(]0\ 1[) = card(\mathbb{R})$

Sugestão*: considere a lei de transformação* $y = tg(\pi(x - \frac{1}{2}))$

E assim acabou de provar que $\mathbb{R}$ não é numerável.