por José Veiga de Faria

NOTA INICIAL: Esta é a continuação do artigo de Setembro que pode ver *aqui*.

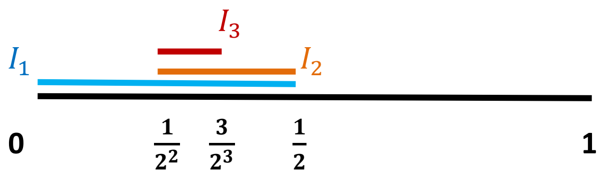
Pressupostos

Supomos que conhece a noção de limite de uma sucessão, que sabe que toda a sucessão monótona limitada é convergente (*ver* artigo de Julho) e que, se para todo o n natural $a_n \leq c$, então $\lim a_n \leq c$.
São conhecimentos ao alcance de um aluno do secundário.

O intervalo [0,1[é não numerável.

Começamos por construir uma aplicação bijectiva φ do conjunto das sucessões com termos em {0,1}, e que não são a partir de uma certa ordem iguais a 1, que designaremos por S, no intervalo [0,1[: $\varphi: S \rightarrow [0,1[$
A cada sucessão a_n em S associamos uma sucessão de intervalos[1] I_n da forma sugerida no artigo anterior, a saber:
Se $a_1 = 0$ então I_1=$[0,\frac{1}{2}[$; se $a_1 = 1$ então I_1=$[\frac{1}{2},1[$.
Agora, para obter I_2 a partir de I_1, partimos I_1em dois intervalos semifechados à esquerda e de igual comprimento e escolho o inferior se $a_2 = 0$ e o superior se $a_2 = 1$ como se sugere na figura abaixo. E assim por diante…

$a_n \rightarrow 0,1,0,\ldots$



NOTA - Por recorrência podemos definir esta sucessão deste modo:

i) I_1=$[0,\frac{1}{2}[$ se $a_1 = 0$; I_1=$[\frac{1}{2},01[$ se a_1 =1;

ii) Sendo I_n=$[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}[$ com $i \in \{1,2,\ldots,2^n\}$ então:

I_{n+1}=$[\frac{2(i-1)}{2^{n+1}},\frac{2i-1}{2^{n+1}}[$ se $a_n = 0$ e I_{n+1}=$[\frac{2i-1}{2^{n+1}},\frac{2i}{2^{n+1}}[$ se $a_n = 1$.

Para estes intervalos verifica-se facilmente que:

P1: O comprimento de I_n é $c(I_n) = \frac{1}{2^n}$ logo $\lim c(I_n) = 0$;

[1] Trata-se de construir um "túnel" cuja largura tende para zero e que nos conduz a um ponto x de [0,1[.

P2: $I_{n+1} \subset I_n$.

Vamos agora ver que $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ é um conjunto singular: com um só ponto de [0,1[.

I não pode ter mais de um ponto

Resulta imediatamente de P1. De fato, dados dois quaisquer pontos distintos, a partir de uma certa ordem o comprimento dos intervalos I_n será inferior à distância entre eles e por isso não podem residir ambos em I_n.

I tem de fato um ponto

Escrevendo $I_n = [x_n, y_n[$ de P2 resulta que x_n será crescente e limitada e por isso é convergente. Pondo $x = \lim\ x_n$ então $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ como vamos ver.

Que x é superior ou igual a todos os x_n resulta de x_n ser crescente.

Como para todo n natural $x_n \leq y_n$ é $x \leq y_n$ qualquer que seja o n em $\mathbb{N}$.

Mas para todo o $N \in \mathbb{N}$ x é inferior a y_N . De fato como a_n não é igual a 1 a partir de N existirá um p superior a N para o qual $a_p = 0$ e então $x \leq y_p < y_{p-1} \leq y_N$.

Então $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

O ponto de I é de [0,1[

Como pertence a uma interseção de intervalos contidos em [0,1[pertence a [0,1[.

Estamos agora em condições de definir φ: pomos $\varphi(a_n) = x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Resta-nos mostrar que φ é biunívoca e sobrejetiva.

a) φ é biunívoca[2]:

   Se a_n e b_n pertencem a S e as sucessões são diferentes então para algum N é $a_N \neq b_N$: um é zero e o outro é 1.
   Mas então para o índice N+1 os intervalos I_{N+1} associados a cada uma das sucessões serão disjuntos logo as suas intersecções serão disjuntas e portanto $\varphi(a_n) \neq \varphi(b_n)$.

[2] Significa que, se no desenho deslocarmos uma das baras coloridas, obviamente temos que deslocar todas as que estão por cima, o nosso "túnel" conduz-nos a um ponto diferente.

b) φ é sobrejetiva:

Dado $x \in [0,1[$ construo a_n como foi indicado no artigo anterior, a saber:

$$a_1 = 0 \text{ se } x \in [0,\tfrac{1}{2}[; \qquad a_1 = 1 \text{ se } x \in [\tfrac{1}{2}, 1[.$$

E agora para cada n se x está no intervalo I_n=$[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}[$ faço $a_{n+1} = 0$ se estiver no semi-intervalo inferior e $a_{n+1} = 1$ se estiver no semi-intervalo superior.

Então $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ logo $x = \varphi(a_n)$.

Para mostrar que [0,1[não é numerável usamos o teorema seguinte cuja demonstração pode ver no **Apêndice**:

Teorema: *Se A contém um conjunto numerável e B é finito ou numerável A e* $A \cup B$ *têm a mesma cardinalidade*.

Ora S contém um conjunto numerável (*por exemplo* $\{1000 \ldots, 01000 \ldots, 00100 \ldots, \ldots\}$)

Deixamos como desafio para o leitor mostrar que o conjunto K das sucessões com termos em {0,1}, e que são a partir de uma certa ordem iguais a 1, é numerável.

Então S e $K \cup S$ são da mesma cardinalidade.

Mas $K \cup S$ é o conjunto das sucessões com termos em {0,1} que é equicardinal ao conjunto das partes de $\mathbb{N}$ que por sua vez é não numerável (*ver artigo de Junho*).

$\mathbb{R}$ é não numerável

O teorema indicado permite facilmente concluir que os intervalos [0,1[e]0,1[são equicardinais.

A aplicação $f:]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ onde $f(x) = tg(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right))$ é uma bijeção.

Então $\mathbb{R}$ é não numerável.

Representação binária dos Reais

A aplicação inversa de φ fornece uma representação binária para os reais entre zero e um.

Como sabemos representar qualquer inteiro na base 2 temos uma representação para qualquer real na base 2.

No próximo mês trataremos este tema ilustrando com alguns exemplos.

Apêndice

Teorema: *Se A contém um conjunto C numerável e B é finito ou numerável então A e* $A \cup B$ *têm a mesma cardinalidade*.

Demonstração:

$B \cup C$ é numerável logo existe $\psi: C \to B \cup C$ bijetiva.

Então $\phi: A \to A \cup B$ tal que $\phi(x) = x$ se $x \notin C$ e $\phi(x) = \psi(x)$ se $x \in C$ é uma bijeção.