A cardinalidade dos Reais (II)

por José Veiga de Faria

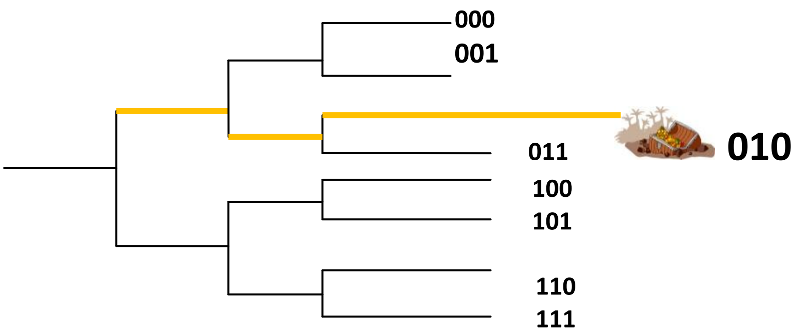
NOTA INICIAL: Esta é a continuação do artigo de Julho que pode ver _aqui_.

Antes de começarmos a percorrer a segunda etapa da estratégia que delineámos para demonstrar que o conjunto dos Números Reais é não numerável vamos tentar dar uma ideia de como podemos usar as sucessões de termos em {0,1} para "contar" os números reais do intervalo [0,1[.

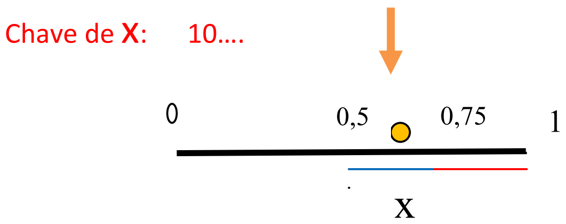
A ideia

Para isso vamos pedir-lhe que, por uns instantes, imagine que o célebre Ali-Bábá encontra o labirinto representado na figura abaixo onde está escondido um tesouro. Sabe que só um percurso o conduz a ele e que todos os outros são sem regresso.

Para se lançar na Caça ao Tesouro precisa de uma chave que lhe indique, em cada bifurcação, se deve virar à direita ou à esquerda. Como poderá ser-lhe dada essa chave? Uma hipótese é uma sequência de zeros e uns onde 0 significa virar à esquerda e 1 à direita. Assim a chave seria neste caso : **010**.



No caso que nos interessa o tesouro de que o Ali Bábá anda à procura vai ser um ponto do intervalo [0,1[e a chave uma sucessão cujos termos são 0 ou 1.



Vamos ver agora como interpretar a chave que indica o caminho até x.

O Ali-Bábá entra no intervalo [0,1[.

Se x estiver no intervalo $[0\ \frac{1}{2}[$ o Ali-Bábá tem de virar à esquerda e o primeiro elemento da chave é 0; se x estiver no intervalo $[\frac{1}{2}\ 1[$ o Ali-Bábá tem de virar à direita e o primeiro elemento chave é 1. A seguir partimos o intervalo onde ele entrou em dois, semi-abertos à direita, de igual comprimento e escolhemos o segundo elemento da sequência: 0 se x estiver no intervalo inferior e 1 se estiver no superior. E assim sucessivamente de forma que a chave vai ser uma sucessão cujo conjunto dos termos vai estar contido no conjunto {0,1}.

Vamos ver que:

i) se o nosso aventureiro tiver nas suas mãos o conjunto X de todas as chaves referidas vai poder chegar a qualquer ponto do intervalo [0,1[, e só a esses;

ii) a mesma chave não permite chegar a dois pontos diferentes;

iii) para cada ponto há só uma chave que conduz até ele: é o único ponto que pertence a todos os intervalos semiabertos (isto é à sua intersecção) pelos quais o nosso Ali-Bábá vai passando seguindo as indicações dos termos da chave;

iv) há chaves que não conduzem a ponto nenhum: são aquelas que são iguais a 1 a partir de uma certa ordem e que formam um conjunto que vamos chamar K: nestes casos a referida intersecção é vazia.

Em termos matemáticos o que dissemos traduz-se dizendo que existe uma bijeção φ de X\K sobre [0,1[: o ponto i) estabelece o espaço de chegada e a sobrejectividade, ii) a unicidade da imagem, iii) a injectividade e iv) o domínio.

Vamos depois provar que X e X\K têm a mesma cardinalidade, que é portanto a de [0,1[, e como sabemos que X é não numerável (*ver artigo de Junho*) ficamos a saber que [0,1[é não numerável.

Mas tudo isto fica para os próximos artigos.