Artigo de Junho de 2014 da rubrica “Se e Só Se”.

Título: Um Problema de Combinatória Para as Férias.

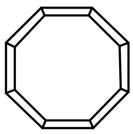
Não é novidade que a Combinatória é uma das áreas da Matemática de que mais gosto e que mais gosto de ensinar, já o tinha escrito no artigo de Fevereiro. Como tal, e sendo este o último artigo antes das férias, decidi deixar aqui um problema de Combinatória. Ou melhor, dois problemas num só. O primeiro, que resolverei, é a versão mais fácil, o segundo, que é a versão mais difícil, ficará para os leitores que quiserem resolver nas férias.

Este problema faz parte do meu livro, e antes de ser incluído nele, gerou muita discussão entre mim e as minhas colegas que o escreveram comigo. Chegar à sua solução não foi imediato, pelo menos no segundo problema.

O enunciado do problema é o seguinte:

Uma determinada empresa de porcelanas concebeu pratos de forma octogonal. Pretende-se pintar de diferentes cores, o rebordo dos pratos, que está dividido em oito partes, como representado na figura. O fundo fica pintado de branco. O departamento de design escolheu cinco cores, castanho, encarnado, amarelo, cinza e preto e indicou que:

- dois rebordos adjacentes devem ser pintados de cores diferentes;
- os rebordos opostos devem ficar pintados da mesma cor.



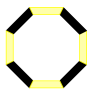
De quantas maneiras distintas pode ser pintado cada um dos pratos?

Este problema pode ser resolvido da seguinte forma:

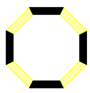
Tendo em conta as condições do enunciado, conclui-se que os pratos podem ser pintados utilizando duas, três ou quatro cores das cinco disponíveis. Não se podem usar as cinco cores porque os rebordos opostos têm de ficar pintados com a mesma cor. Assim, vamos de considerar três casos:

1.º Caso: Os pratos são pintados com duas cores.

Das cinco cores escolhem-se duas, o número de maneiras de o fazer é ${}^{5}C_2$. Depois de escolhidas as duas cores os pratos só podem ser pintados de uma maneira. Por exemplo, escolhendo o preto e o amarelo, os pratos só podem ser pintados da seguinte forma:



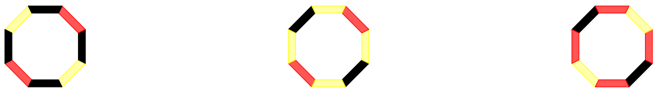
Repare que estes pratos são exactamente iguais aos pratos da figura seguinte (basta rodar o prato de cima 45º, no sentido positivo ou negativo, em torno de seu centro):



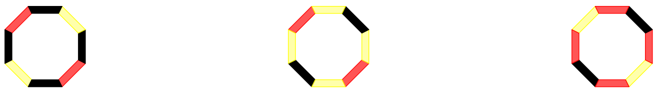
Portanto, para este caso existem ${}^{5}C_2 = 10$ maneiras diferentes de pintar os pratos.

2.º Caso: Os pratos são pintados com três cores.

Das cinco cores escolhem-se três, o número de maneiras de o fazer é ${}^{5}C_3$. Depois de escolhidas as três cores os pratos podem ser pintados de três maneiras diferentes. Escolhendo, por exemplo o preto, o amarelo e o encarnado, os pratos podem ser pintados das seguintes formas:



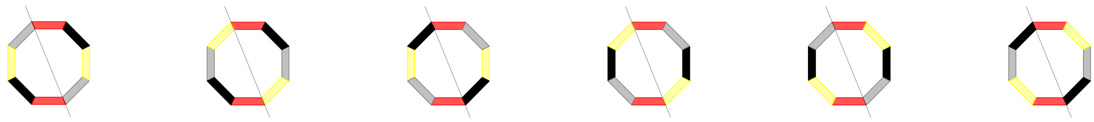
Repare que estes pratos são exactamente iguais aos pratos da figura seguinte (basta rodar os pratos de cima 90°, no sentido positivo ou negativo, em torno de seu centro):



Assim, para este caso, existem $3\times {}^{5}C_{3}=30$ maneiras diferentes de pintar os pratos.

3.º Caso: Os pratos são pintados com quatro cores.

${}^{5}C_{4}$ é o número de maneira distintas de escolher quatro cores entre as cinco disponíveis. Depois de escolhidas as quatro cores os pratos podem ser pintados de seis maneiras diferentes. Supondo que se escolhem as cores, preto, amarelo, encarnado e cinza, assim, temos as seguintes maneiras de pintar os pratos:



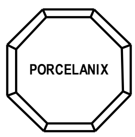
De uma outra maneira, considerando uma das metades do prato (como representado na figura de cima) e fixando numa das quatro posições uma as cores, as restantes três cores permutam nas restantes três posições de $3!=6$ maneiras.

Então, para este caso, existem ${}^{5}C_{4}\times 3!=30$ maneiras diferentes de pintar os pratos.

Adicionando os valores obtidos em cada um dos casos, conclui-se que número de maneiras de pintar os pratos nas condições do enunciado é 70.

O problema para as férias é o seguinte:

Considere que se deciciu colocar o nome da empresa no centro do prato, como está exemplificado na figura seguinte.



Questões:

i) Com as mesmas cinco cores, de quantas maneiras distintas pode ser pintado cada um dos pratos?

ii) Dispõem-se de n cores, com n natural e maior do que 4. Escreva em função de n, uma expressão que permita determinar o número de maneiras distintas de pintar cada um dos pratos.

Podem enviar as vossas propostas de resolução para jc.dasilvapereira@gmail.com. A resolução da questão *i*) encontra-se no meu site, mas não vale ir espreitar! No artigo de Setembro darei a resolução das questões *i*) e *ii*).

Por fim, no artigo de Fevereiro estão mais dois problemas de combinatória que ainda não foram resolvidos, podem também tentar resolvê-los.

Boas férias.

José Carlos Pereira