Artigo de Outubro de 2014 da rubrica “Se e Só Se”.

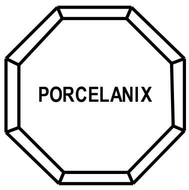
Título: A Resolução Prometida

Como prometi em Setembro, neste artigo vou fazer a resolução do problema que está em aberto desde Julho.

O enunciado é o seguinte:

Uma determinada empresa de porcelanas concebeu pratos de forma octogonal. Pretende-se pintar de diferentes cores o rebordo dos pratos, que está dividido em oito partes, como representado na figura. No fundo do prato colocou-se, centrado, o nome da empresa. O departamento de design escolheu cinco cores, castanho, encarnado, amarelo, cinza e preto e indicou que:

- dois rebordos adjacentes devem ser pintados de cores diferentes;
- os rebordos opostos devem ficar pintados da mesma cor.



Questões:

i) De quantas maneiras distintas pode ser pintado cada um dos pratos?

ii) Suponha que se dispõe de n cores, com n natural e maior ou igual a 4. Escreva em função de n, uma expressão que permita determinar o número de maneiras distintas de pintar cada um dos pratos.

Da mesma forma como foi resolvido o problema do artigo de Julho, vamos também considerar três casos para resolver a questão *i*):

1.º Caso: Os pratos são pintados com duas cores.

Das cinco cores escolhem-se duas, o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2$. Depois de escolhidas as duas cores, os pratos podem ser pintados de duas maneiras. Escolhendo, por exemplo, o preto e o amarelo, os pratos podem ser pintados das seguintes formas:

Portanto, neste caso, para cada duas cores escolhidas os pratos podem ser pintados de duas maneiras. Logo, neste 1.º caso, existem ${}^5C_2 \times 2 = 20$ maneiras diferentes de pintar os pratos.

2.º Caso: Os pratos são pintados com três cores.

Das cinco cores escolhem-se três, o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_3$. Escolhendo, por exemplo, o preto, o amarelo e o encarnado, os pratos podem ser pintados das seguintes formas:

No exemplo acima, o preto é a única cor que se repete quatro vezes. Todavia, a cor repetida poderia ser a amarela ou a encarnada. Portanto, neste caso, para cada três cores escolhidas, os pratos podem ser pintados 3×4 maneiras distintas. Logo, para este caso existem ${}^{5}C_3 \times 3\times 4 = 120$ maneiras diferentes de pintar os pratos.

3.º Caso: Os pratos são pintados com quatro cores.

Das cinco cores escolhem-se, ordenadamente, quatro, para pintar os quatro lados de uma das metades dos pratos. O número de maneiras de o fazer é ${}^{5}A_4 = 120$. Pensando de uma outra forma, das cinco cores escolhem-se quatro. O número de maneiras de o fazer é ${}^{5}C_4$. Para cada uma destas escolhas, as quatro cores permutam entre si, nas quatro posições de uma das metades dos pratos, de $4!$ maneiras distintas. Assim, para este caso, o número pedido é ${}^{5}C_4 \times 4! = {}^{5}A_4 = 120$.

Adicionando os valores obtidos em cada um dos casos, conclui-se que número de maneiras de pintar os pratos nas condições do enunciado é 260.

Depois de conhecermos a resolução para o caso de termos disponíveis cinco cores, a resposta à questão *ii)* é imediata, ou quase imediata. O único factor que diferencia a questão *i)* da *ii)* é o número de cores. Sabendo isto, não será difícil ao leitor perceber que para n cores, com n natural e maior ou igual a 4, o número de maneiras de pintar os pratos é dado por ${}^{n}C_2 \times 2 + {}^{n}C_3 \times 3\times 4 + {}^{n}A_4$.

Para o leitor, deixo a tarefa de mostrar que ${}^{n}C_2 \times 2 + {}^{n}C_3 \times 3\times 4 + {}^{n}A_4 = n(n-1)\left(n^2 - 3n + 3\right)$.

José Carlos Pereira