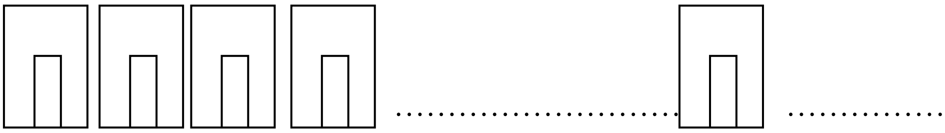
ALEPH_0 : um hotel muito especial que nunca está cheio

1. Um hotel, chamado o Aleph_0, tem os seus quartos numerados com os números inteiros maiores ou iguais a 1: 1, 2, 3, 4, … (Este conjunto designa-se por N e diz-se o conjunto dos números naturais).
2. Cada quarto tem um número e um só, não há dois quartos com números iguais e todo o número natural está atribuído a um quarto.

Dá um nome e caracteriza a relação entre N e o conjunto dos quartos.

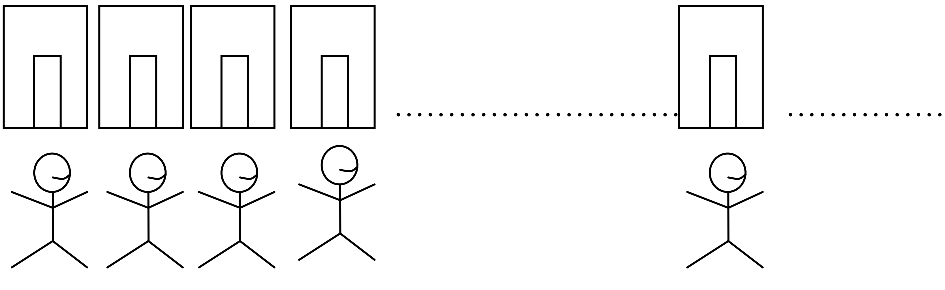
Quartos:

1 2 3 4 ……………………… n ....



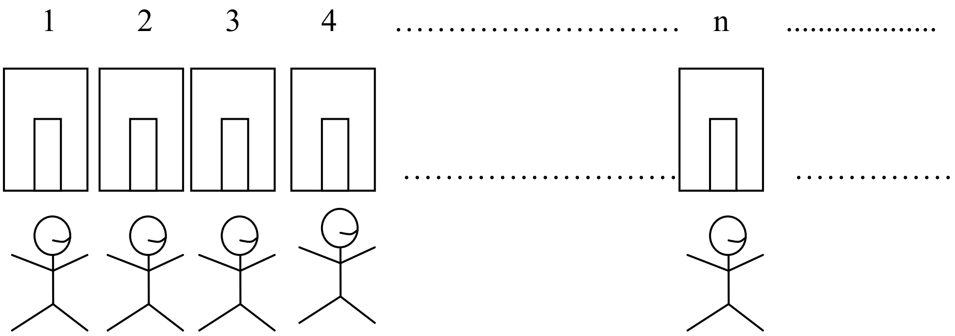
Chega uma excursão.

1 2 3 4 ……………………… n ....



O hotel estava vazio e a recepção resolveu colocar uma pessoa em cada quarto. Quando terminou o registo de clientes verificou que o hotel tinha ficado cheio.

Passada meia hora chega mais um cliente:



O recepcionista sentiu-se tentado a despachá-lo: o hotel estava cheio.

Mas ele era bom em Matemática e por isso pôs-se a pensar.

E rapidamente descobriu que trocando as pessoas de quarto conseguia alojar o novo cliente ficando o hotel de novo cheio. Espantoso: neste hotel cabia sempre mais um cliente.

Tenta descobrir como ele procedeu.

Proximamente damos as soluções e continuamos a desbravar as propriedades deste fantástico hotel.

b) *Mostre que não é possível resolver o problema incomodando apenas um conjunto finito de hóspedes*;

Passado pouco tempo dirige-se à recepção a guia de uma excursão que põe o problema seguinte: temos os nossos excursionistas numerados tendo cada um número maior ou igual a 1 de modo que não há dois excursionistas com o mesmo número e todos números naturais foram utilizados: passaremos a referir-nos a esta excursão como ´excursão numerável´.

d) *Caracterize em termos de funções a aplicação de* N *no conjunto dos excursionistas*.

e) *Encontre uma solução para alojar estes novos clientes de modo que cada quarto não fique com mais de uma pessoa*.

Logo a seguir chegam três ´excursões numeráveis´; a recepção depois de pensar conseguiu alojá-los de forma a todos os hóspedes ficarem em quartos individuais:

f) *Indique como pode ter procedido*.

Finalmente chegaram várias ´ excursões numeráveis ´; a cada uma foi atribuído um e um só elemento de N tendo o cuidado de não atribuir o mesmo número a duas excursões diferentes: verificou-se que todos os elementos de N foram usados.

A recepção receou não ter lugar para ´tanta gente´; mas o negócio era chorudo e a oportunidade não era de perder. Resolveu telefonar para um matemático que vivia a dois quarteirões daí e passado meia hora tinha alojado todos os excursionistas mantendo os quartos com um único hóspede cada.

g) *Como terá procedido*?

Sugestão: Considere a aplicação de NxN em N sugerida pelas linhas seguintes:

$(1,1)_1$				Linha de soma Dois.
$(1,2)_2$	$(2,1)_3$			Linha de soma Três.
$(1,3)_4$	$(2,2)_5$	$(3,1)_6$		Linha de soma Quatro.
$(1,4)_7$	$(2,3)_8$	$(3,2)_9$	$(4,1)_{10}$	Linha de soma Cinco.
$(1,5)_{11}$ ………………				

Entenda o primeiro elemento do par como o número da excursão, o segundo como o número do turista nessa excursão e o índice como o número do quarto.

Note que se trata da aplicação: $\varphi : \underset{(i,j)\to\frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2}+i}{NxN \to N}$ e mostre que se trata de uma bijecção.

Q é numerável

1. Mostre que Z e N são equicardinais;
2. Mostre ainda que ZxN e NxN são equicardinais;
3. Conclua de g) que NxN é numerável;
4. Mostre que ZxN é numerável;
5. Mostre que existe uma injecção de Q em ZxN e portanto em N;
6. Mostre que se existe uma aplicação injectiva de um conjunto X, não finito, em N então X e N são equicardinais;
7. Conclua que Q é numerável.