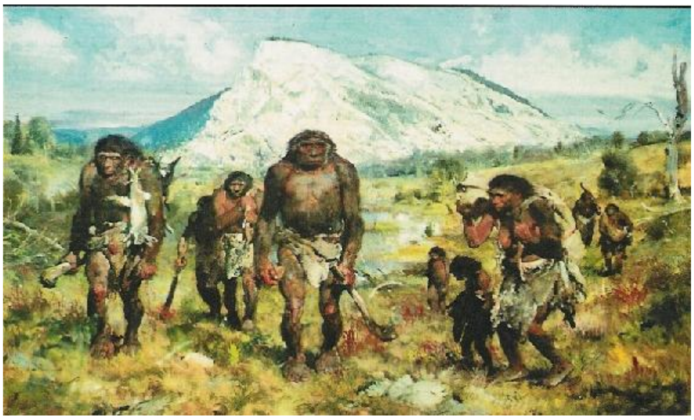
O aparecimento das noções de finito e infinito na mente humana

O Homem primitivo, nómada, era um homem assustado e os problemas com que se defrontava eram basicamente os de proteger-se das agruras da natureza e dos animais ferozes bem como arranjar alimento: caçar e pescar.



Estas actividades não lhe criaram a necessidade de contar e calcular.

Com a descoberta da agricultura e a domesticação de animais o homem tornou-se sedentário.

Passou a pastorear rebanhos de ovelhas ou outros animais. Então queria ter a certeza de que, ao fim do dia, recolhia tantos animais como os que tinha levado pela manhã.

Provavelmente conseguiu-o recorrendo a um conjunto de pedras (ou paus, mas estes sendo mais quebradiços, podiam induzir erros) : por cada animal que saía colocava uma pedra num saco e, na recolha, ia retirando as pedras à medida que os animais entravam. Se ficassem pedras no saco é porque havia animais perdidos, se o saco ficasse vazio quando ainda entravam animais é porque havia "visitantes estranhos" e se a última pedra saísse do saco com a entrada do último animal , então tinham saído tantos animais quantos os que havia entrado.

Como nota referimos que *pedras se* diz "*calculus*" em latim e daí o nome de Cálculo dado ao ramo da Matemática que tem a ver com contar e operar com números.

Este foi, muito provavelmente, o primeiro confronto do homem com a noção de número: um conceito muito abstracto que naquela altura significava apenas que quando houvesse, em termos actuais, uma bijecção do conjunto das pedras no saco e o conjunto de animais eles tinham o mesmo número de elementos.

Com a vida sedentária que passou a levar começou a pensar na sucessão dos dias e noites.

Talvez lhe tivesse ocorrido que, diferentemente dos animais que possuía, aos dias e noites que tinha pela frente podia sempre acrescentar mais um: eram infinitos em potência.

Este pensamento confrontou-o pela primeira vez com o infinito potencial.

O infinito em acto e comparação entre infinitos

Foi Galileu quem pela primeira vez admitiu a pensabilidade de um conjunto infinito: o infinito em acto.

A comparação entre conjuntos infinitos foi ousada pela primeira vez por Cantor.
Definiu dois conjuntos infinitos como representando um mesmo número cardinal, ou equicardinais, se e só se existir uma bijecção de um sobre o outro ou forem ambos vazios.

Esta ideia infantil revelou-se fecunda mas deu origem a vários paradoxos como veremos em breve.

O mais pequeno dos conjuntos infinitos: o conjunto dos naturais

O conjunto dos dias à nossa frente pode ter servido de inspiração para chegar ao conjunto de axiomas que definem o conjunto infinito "mais pequeno": o conjunto dos naturais.

De facto: i) há um dia nesse conjunto que não é seguinte de qualquer outro;

ii) todo o dia tem um dia seguinte diferente dele;

iii) o mesmo dia não pode ser seguinte de dois dia diferentes.

Passando para o conjunto dos naturais passamos a indicar os axiomas que o definem:

Axiomas de Peano:

A1 . $1 \in$ N

Explicação:

Este axioma indica que N tem pelo menos um elemento.

A2. Qualquer que seja o n natural existe um e um só natural diferente dele chamado o

sucessor de n.

Explicação:

Assim 1 tem um sucessor a que podemos chamar 2 e este tem também um sucessor, diferente dele.

Mas até aqui nada impede que suc 2 = 1. E se fosse esse o caso o conjunto {1, 2} verificava A1 e A2 e podia então chamar-se o conjunto dos números naturais. Ora não queremos que isso aconteça.

Para o evitar acrescentamos um novo axioma:

A3. 1 não é sucessor de qualquer natural .

Explicação:

Agora o sucessor de 2 não pode ser 1 nem 2 logo deverá ser um outro elemento: chamemos-lhe 3. Este 3 tem também um sucessor mas, até agora, nada impede que seja 2.

Se isso acontecesse o conjunto {1, 2, 3} verificaria A1, A2 e A3 e poderia chamar-se N.

Como queremos evitar que isso a aconteça juntamos um novo axioma:

A4. O mesmo número não pode ser sucessor de elementos diferentes ou formalmente:

$$suc\ m = suc\ n \longrightarrow m = n$$

Explicação:

Então o sucessor de 3 não pode ser nenhum dos anteriores (1 não pode por A2 e os outros já são sucessores) : chamemos-lhe 4; o mesmo se passa com o sucessor de 4 a que podemos chamar 5, etc.

Mas não podemos ficar por aqui: se ficássemos teríamos de chamar N ao conjunto R dos números reais pois verifica os quatro axiomas. E esse não é o N que temos em mente: havemos de ver que é “maior”.

Há que acrescentar um último axioma que nos garanta que os naturais são o “menor” conjunto que verifica os quatro axiomas indicados :

A5 . Se P é uma parte de N e:

i) $1 \in N$; Base de Indução

ii) $n \in N \longrightarrow suc\ n \in N$ Princípio da hereditariedade

então P = N.

Explicação:

Repare agora que R não verifica A5 pois o conjunto P = { 1,2,3,4,5,…} verifica i) e ii) e P ≠ R.

Este axioma é a base de um princípio de prova muito importante em matemática: O **Princípio de Indução**. Pode saber mais sobre ele se ler o texto correspondente que incluímos no âmbito deste problema.

Aleph0: o cardinal do numerável

Os conjuntos equicardinais a N diz-se que têm a cardinalidade do numerável: aleph0

Na próxima semana falaremos dos incríveis paradoxos a que a noção de equicardinalidade conduz e ajudá-lo-emos a mostrar que o conjunto dos racionais é numerável.

Conjuntos finitos

Um conjunto X é finito se e só se for vazio ou existir um n0 natural tal que X e {1, 2, …,n0} são equicardinais.

.