# Cónicas - A hipérbole (II) por José Veiga de Faria

## Um outro método para construir pontos de uma hipérbole

### 1. A equação de uma hipérbole na forma canónica

Vimos no último artigo que uma curva no plano é uma hipérbole se e só se existirem dois pontos F1 e F2, chamados focos, tais que o módulo da diferença das distâncias de qualquer ponto da curva aos focos é constante e menor do que a distância entre eles, suponhamos igual a d, ou seja a hipérbole é o conjunto:

$$E = \{P \in Plano: |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = d < d(F_1,F_{2)}\}$$

Num referencial cartesiano ortonormado (eixos ortogonais e em que o segmento unitário tem o mesmo comprimento em ambos os eixos) se colocarmos os focos em pontos do eixo dos xx's simétricos em relação à origem a condição $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = d$ escreve-se, designando por (x,y) as coordenadas do ponto corrente da hipérbole e por (f,0) e (-f,0) as coordenadas dos focos, $|\sqrt{(x-f)^2+y^2} - \sqrt{(x+f)^2+y^2}| = d$.

Eliminando as raízes nesta igualdade obtemos uma condição equivalente chamada ***a equação da hipérbole na forma canónica***:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2} = 1 \quad (1)$$

onde $a = \frac{d}{2}$ e $b^2 = f^2 - a^2$.

Repare que *a* e *–a* são as abcissas dos pontos em que a hipérbole intersecta o eixo dos xx's.

O retângulo centrado na origem, de lados paralelos aos eixos, com comprimentos 2a e 2b chama-se o "*retângulo fundamental*" da hipérbole. Note que a sua diagonal mede 2f.

O quociente $\frac{f}{a}$ chama-se excentricidade da hipérbole: trata-se do quociente entre o comprimento da diagonal do "*retângulo fundamental*" e o do seu lado paralelo o Ox.

### 2. Um outro método de construção de pontos de uma hipérbole

Repare na figura abaixo onde o "*retângulo fundamental*" está representado a vermelho.

Se (x,y) pertence à hipérbole satisfaz (1). Vamos supor x,y ≥ 0.

Então $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ logo $\frac{x}{a} \geq 1$ e portanto existe um e um só $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $\frac{x}{a} = sec\theta$ ou

$$x^2 = a^2 sec^2\theta$$

De (1) resulta $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$ e portanto $\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\theta-1=\mathrm{tg}^2\theta$ ou

$$y^2=b^2tg^2\theta$$

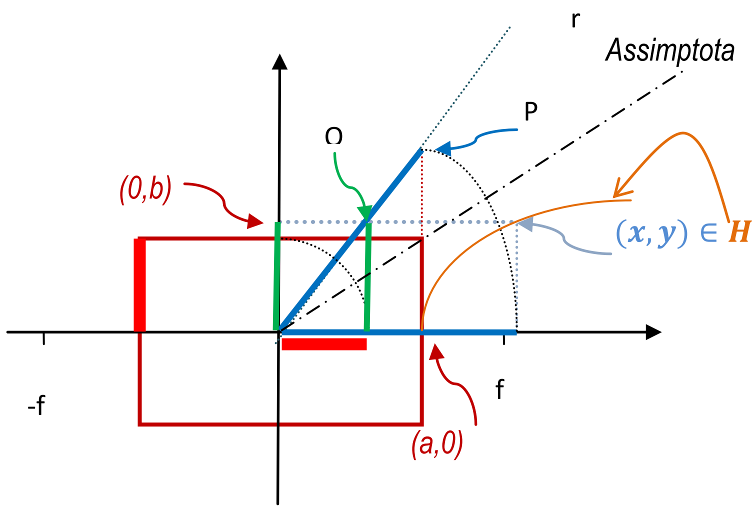
Facilmente o leitor reconhecerá que a correspondência $\theta \mapsto (x=asec\theta, y=btg\theta)$, entre os pontos do intervalo $[0,\frac{\pi}{2}[$ e o conjunto H dos pontos (x,y) da hipérbole que estão no primeiro quadrante é uma bijeção.

Isto permite-nos construir os pontos de H rodando em torno da origem, e em sentido direto, de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, uma semirreta *r* a partir da posição em que está contida no eixo dos xx's .

Sendo $\theta$ o ângulo que *r* faz com a parte positiva do eixo dos xx's vamos ver como construir o ponto (x,y) de H correspondente.

i) Para obter x determino o ponto P de *r* de abcissa *a*.
A distância de P à origem é x (*comprimento do segmento a azul*): é óbvio que $x=asec\theta$.

ii) Para obter y procuro o ponto Q de *r* de abcissa b. A ordenada deste ponto é o y que procuro (*comprimento do segmento a verde*):é óbvio que $y=btg\theta$.



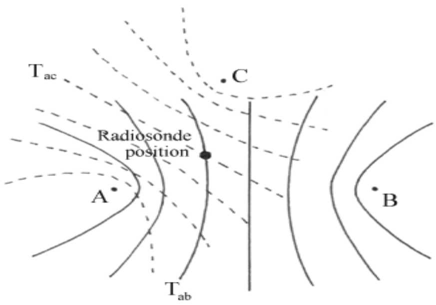

### 3. As assimptotas

Se procurar os valores de k para os quais a reta de equação y=kx interseta a hipérbole, ou seja, para os quais a equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(kx)^2}{b^2}=1$ tem solução obtém o conjunto $S=\{k\in\mathbb{R}: |k|<\frac{b}{a}\}$ . O menor valor positivo de k para o qual a interseção é vazia é portanto $\frac{b}{a}$.

Facilmente reconhecerá que a distância dos pontos de H à reta $y = \frac{b}{a}x$ tende para zero quando x tende para infinito (basta ver que $\lim_{x\to\infty}[\frac{b}{a}x - b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}] = 0$).
Então as retas que contêm as diagonais do retângulo fundamental são as assimptotas da hipérbole.

## 4. Uma aplicação: a determinação da posição de um navio

Alguns sistemas que se usaram, e alguns ainda se usam como backup ao GPS, para determinar a posição de um navio baseavam-se na diferença de tempo com que no navio se ouviam sinais emitidos por duas estações simultaneamente. Esta diferença permite, multiplicando pela velocidade de propagação do sinal, obter a diferença das distâncias do navio às estações e portanto situá-lo sobre uma hipérbole. Se acrescentarmos uma terceira estação que emite sinais simultaneamente com as restantes obtemos mais duas hipérboles e isto já nos permite conhecer o ponto.
São exemplos de sistemas baseados neste princípio, mas com algumas importantes alterações, os sistemas LORAN e DECCA.




**Receptor LORAN-C** **Linhas onde a diferença de tempos é constante**