

Medida de Lebesgue

de um conjunto de pontos da circunferência C de raio 1

1. **Medida de um arco aberto PQ** (sem os pontos extremos) : é o comprimento do arco com início em P e extremidade em Q sendo o deslocamento de P para Q feito no sentido do ponteiro dos relógios; se $P=Q$ o arco é vazio a medida é zero.

2. Conjuntos abertos

Chamamos abertos aos conjuntos que são reunião arbitrária de arcos abertos.

3. Medida de um aberto A : $\mu(A)$

A é uma reunião de arcos abertos. A medida de A é a soma das medidas de cada um dos arcos.

NOTA- Se o conjunto de arcos é infinito é numerável (prove como exercício notando que, para cada n natural, o conjunto de arcos disjuntos com medida superior a $\frac{1}{n}$ é finito) e a sua medida é a soma de uma série que facilmente se reconhece ser convergente.

4. Conjuntos fechados

Chamamos fechados aos conjuntos que são complementares em C de conjuntos abertos.

5. Medida de um fechado B : $\mu(B)$

$$\mu(B) = 2\pi - \mu(A)$$

6. Medida exterior de um conjunto A

Chamando Σ ao conjunto das medidas dos abertos que contêm A , a medida exterior de A , $\mu_e(A)$, é o ínfimo de Σ .

7. Medida interior de um conjunto A : $\mu_i(A)$

$$\mu_i(A) = 2\pi - \mu_e(C \setminus A)$$

8. Medida de um conjunto

A é mensurável se e só se $\mu_i(A) = \mu_e(A)$

Nesse caso é: $\mu(A) = \mu_i(A) = \mu_e(A)$

Exercício:

Deixamos como exercício mostrar que a medida do conjunto dos pontos da circunferência com abcissa e ordenada racionais (supondo a circunferência com centro na origem de um referencial ortonormado) é nula.