Vamos então hoje tentar duplicar o disco do Sr. Silva.

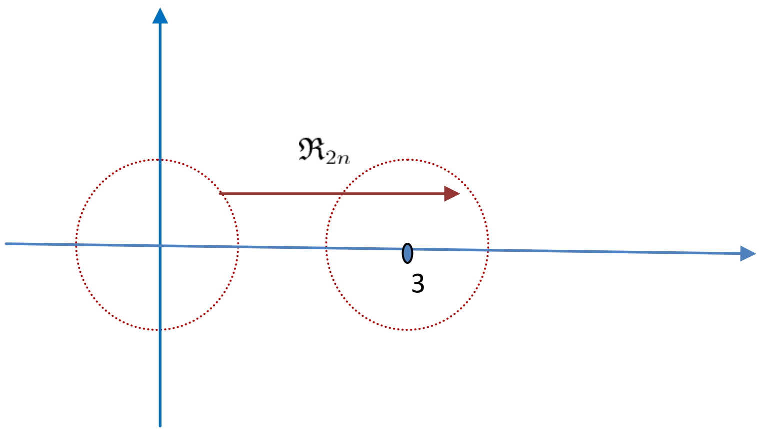
Para tornar mais fácil a apresentação dos desafios desta semana introduzimos uma definição muito simples: adição de um racional com um conjunto de pontos da circunferência C de raio 1.

Definição: Se $q \in Q$ e A é um conjunto de pontos da circunferência de raio 1 então:

$$q + A = \{q + P : P \in A\}$$

***Nota**: Este é o conjunto que resulta de "rodar" A em torno do centro da circunferência de um ângulo q no sentido dos ponteiros do relógio se q > 0 e no sentido contrário se q < 0. [Relembre a definição que demos, na resolução de Fevereiro, de adição de um ponto com um racional]*

1. Relembre que existe uma bijecção de $\aleph$ em Q : q_n.
2. Considere, para cada n natural, o conjunto: $R_n = \{q_n + P : P \in V\}$ onde V é o conjunto de Vitali a que já nos referimos. Imagine a circunferência C com o seu centro na origem de um referencial ortonormado e efectue sobre os conjuntos R_{2n} um translação provocada pelo vector (3,0) de forma que ele se transforme num conjunto S_{2n} sobre a circunferência de raio um e centro em (3,0).



Mostre que $V = -q_{2n+1} + R_{2n+1}$ e que $\widehat{V} = -q_{2n} + S_{2n}$

onde $\widehat{V}$ é o resultado de uma translação sobre V provocada pelo vector(3,0).

3. Mostre agora que, sendo

$$\widehat{R}_n = q_n - q_{2n+1} + R_{2n+1} = q_n + V \text{ e}$$

$$\widehat{S}_n = q_n - q_{2n} + S_{2n} = q_n + \hat{V}$$

os conjuntos $\widehat{R}_n$ formam uma partição de C e que os conjuntos $\widehat{S}_n$ formam uma partição da circunferência de raio um e centro em (3,0).

4. Suponha que ao disco do Snr. Silva falta o centro (um ponto...). Verifique que, se na construção que fizemos substituirmos cada ponto P sobre C pelo raio com extremidade em P menos o centro, duplicamos o disco tendo recorrido apenas a operações que não "deformam" as partes em que dividimos o disco inicial.
5. Tente agora preencher o centro nas duas cópias do disco sem o centro. Proceda em cada cópia da forma seguinte:

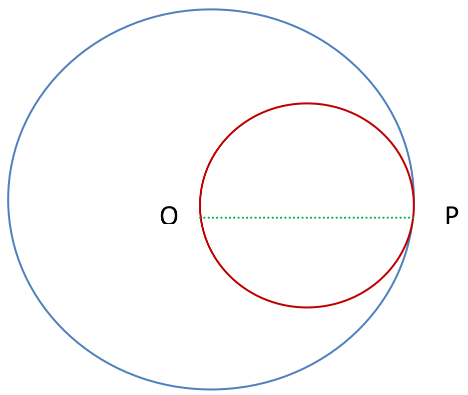
   i) Escolha P em C e tome a circunferência D de diâmetro OP onde O é o centro de C;

   ii) Sendo O' o centro de D considere o conjunto K dos pontos de D que se obtêm "andando" O sobre D no sentido os ponteiros do relógio de um arco que é um número natural: $K = \{n + O : n \in aleph\}$ com a adição em D.

   Mostre que: a) $K \subset D$; $O \notin K$;

   b) A aplicação de $\phi : \aleph \longrightarrow D$ tal que $\phi(n) = n + O$ é injectiva.

   iii) Mostre que $-1 + K = K \cup \{O\}$ (adição em D) e que desta forma preenche o centro em ambos os discos.



Finalmente duplicou o disco do Snr. Silva.

No próximo mês começaremos a tentar reduzi-lo de forma a obtermos o disco para a Telma.