Poderá perguntar-se se todos os conjuntos infinitos "são como" os naturais isto é se têm a mesma cardinalidade.

Vamos ver que não: por exemplo o conjunto S das sucessões cujo conjunto dos termos está contido em {0,1} tem cardinalidade superior à dos naturais.

Para o reconhecer vamos usar um método muito simples proposto por Cantor e que tem o seu nome: a "***Diagonalização de Cantor***".

Suponhamos que φ é uma aplicação injetiva de $\mathbb{N}_1$ em S (*tente indicar uma*).

Vamos traduzi-la numa tabela: na primeira linha estão os elementos de $\mathbb{N}_1$ e na coluna m, a partir da segunda linha, os termos de $\varphi(m) = a_{nm}$.

$\mathbb{N}_1 \longrightarrow$	1	2	3	4	5	...
	0	0	1	1	0	...
	1	0	0	1	0	...
	1	0	1	1	0	...
	1	1	0	1	0	...
	0	0	1	1	0	...
	...	...	...	...	...	...
	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	a_{n4}	a_{n5}	...

Alterando os elementos da diagonal, a vermelho na figura, podemos construir a sucessão:

$$b_n = \begin{cases} 0 & se \quad a_{nn} = 1 \\ 1 & se \quad a_{nn} = 0 \end{cases}$$

que pertence a S mas não a φ ($\mathbb{N}_1$).

Isto mostra que não existe uma bijeção de $\mathbb{N}_1$ sobre S.

Note que o conjunto S é equicardinal ao conjunto das partes dos naturais: a aplicação que associa a cada sucessão a_n o conjunto dos $\{n \in \mathbb{N}_1 : a_n = 1\}$ facilmente se reconhece ser uma bijeção.

Temos então que: $card(\mathbb{N}_1) < card\, \wp(\mathbb{N}_1)$

O Teorema de Cantor que enunciamos a seguir generaliza este resultado.

Teorema de Cantor:

Se X é um conjunto não existe uma aplicação sobrejectiva de X em $\wp(X)$ (*conjunto das partes de X*).

NOTA - *Se tiver interesse pode ver a demonstração no* **<u>Apêndice</u>**.

Uma relação de ordem nos cardinais

Vemos assim que se existe uma aplicação biunívoca de X em $\wp(X)$ mas não o contrário: diz-se que $card(X) < card(\wp(X))$.

A cardinalidade de $\mathbb{N}_1$ é inferior a qualquer outra de conjuntos infinitos.

Começando em $\mathbb{N}_1$, podemos escrever, para conjuntos infinitos:

$$card(\mathbb{N}_1) < card\, \wp(\mathbb{N}_1) < card\, \wp(\wp(N_1)) < \ldots$$

Há infinitos cardinais transfinitos

Nesta cadeia podemos acrescentar sempre mais um cardinal.

Será que isto lhe relembra os axiomas de Peano? Há, de facto, pelo menos, tantos cardinais transfinitos (cardinais de conjuntos infinitos) como os naturais.

Vai-nos interessar no próximo artigo a cardinalidade de $\wp(N_1)$ designada por cardinalidade do contínuo: havemos de ver que é a cardinalidade da reta real e é designada por $\mathcal{C}$.

A hipótese do contínuo

Pode perguntar-se se qualquer subconjunto não numerável dos reais é equicardinal a $\mathbb{R}$, ou seja, tem a cardinalidade do contínuo. Isto é equivalente a perguntar se existe algum cardinal entre Aleph_0 e $\mathcal{C}$.

Cantor conjeturou que tal cardinalidade não existe e essa conjetura ficou conhecida como a ***hipótese do contínuo (HC).***

Em 1963 P. Cohen mostrou que dos Axiomas da Teoria dos Conjuntos não resulta nem HC nem a sua negação.

Apêndice

Teorema de Cantor

Demonstração: A afirmação é óbvia se $X = \varnothing$.

Se $X \neq \varnothing$, dada $\psi : X \longrightarrow \wp(X)$ o subconjunto C de X. $C = \{x \in X : x \notin \psi(x)\}$ não pertence ao contradomínio de ψ.