Introdução

Nos anos lectivos de 2006/07 e 2007/08 leccionei uma turma de MACS no Colégio S. João de Brito.

No âmbito dessa disciplina foram elaborados por vários alunos, individualmente ou em grupo, trabalhos sobre Métodos de Partilha no Caso Contínuo *(caso em que supomos que de qualquer "fatia" do bolo podemos retirar ou acrescentar uma outra de dimensões arbitrariamente pequenas*) .

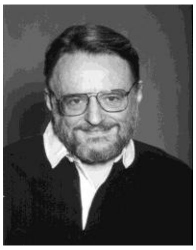
É um desses trabalhos, que ajudei a elaborar e revi, que vou apresentar esta semana como solução para este problema agradecendo aos alunos que se empenharam com entusiasmo para os fazer.

Este é um método de partilha ***"livre de inveja".***

O trabalho foi elaborado pelos alunos Leonor Barroso, Sofia Leite e Francisco Guimarães a quem deixo aqui os meus agradecimentos.

Na próxima semana apresentaremos um outro método que foi objecto de um outro trabalho também muito bem conseguido.

Método de *John Selfridge e John Conway*

John Horton Conway nasceu em Liverpool a 26 de Dezembro de 1937. Estudou em Cambridge. Foi eleito membro da *Royal Society* em 1981. Actualmente é Professor na Universidade de Princeton.

Para além do método de partilha livre de inveja conseguido com John Selfridge, formulou várias teorias matemáticas e publicou alguns livros, como Atlas dos Grupos Finitos, Sobre Números e Jogos ou Modos de vencer.

É o criador de muitos jogos matemáticos e admite mesmo que nos tempos de faculdade passava mais tempo a jogar do que a estudar, o que o fazia sentir-se culpado até descobrir que estes jogos são uma forma de matemática: ***«You get surreal numbers by playing games. I used to feel guilty in Cambridge that I spent all day playing games, while I was supposed to be doing mathematics. Then, when I discovered surreal numbers, I realized that playing games IS mathematics***.»

John Selfridge era, para além de matemático, arquitecto. Fez estudos interessantes sobre vários assuntos e, na década de 60, desenvolveu com o companheiro do corpo docente da Universidade de Princeton um método de partilha proporcional e livre de inveja.

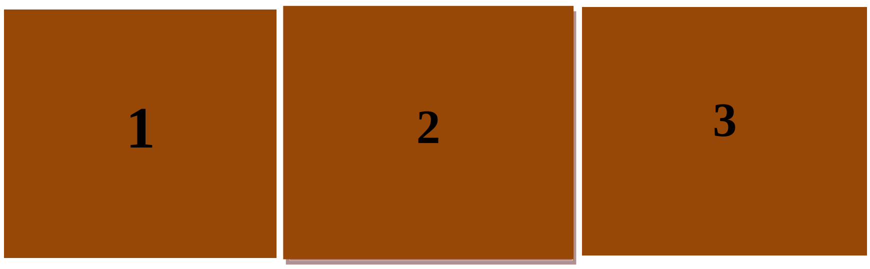
Passamos então à descrição do método:

Suponhamos que o Chefe Hélio (A), o João (B) e o José (C) querem dividir um bolo. É estabelecida uma ordem aleatoriamente: A, B, C.

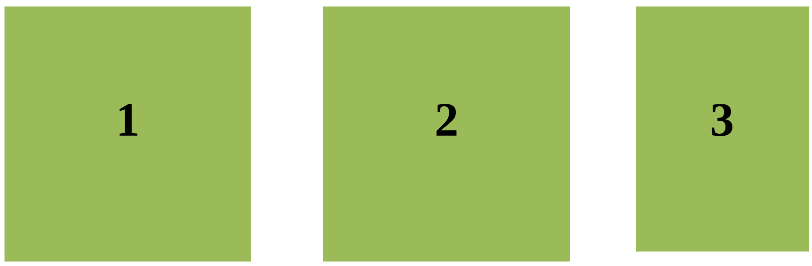
Neste método contemplamos dois casos possíveis:

Primeiro caso:

1º Passo: A corta o bolo em três fatias iguais do seu ponto de vista.



2º Passo: B, caso considere que não há nenhuma de valor superior às outras duas, não faz nada.



3º Passo: C escolhe fatia que considera maior: suponhamos a 2.

4º Passo: O próximo a escolher será o B, o qual pode escolher, entre as duas fatias que restam, aquela que mais lhe agrada. Suponhamos que escolhe 1.

5º Passo: Por fim, A fica com a terceira fatia 3.

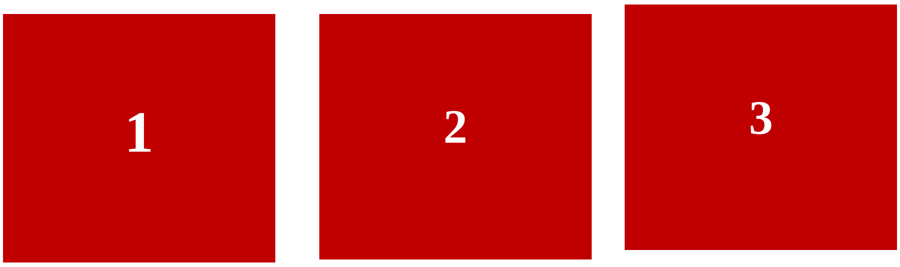
Nesta situação não é necessário recorrer a uma segunda etapa para se conseguir uma divisão livre de inveja.

Desafiamos o leitor a provar que com esta divisão ninguém inveja ninguém.

Segundo caso:

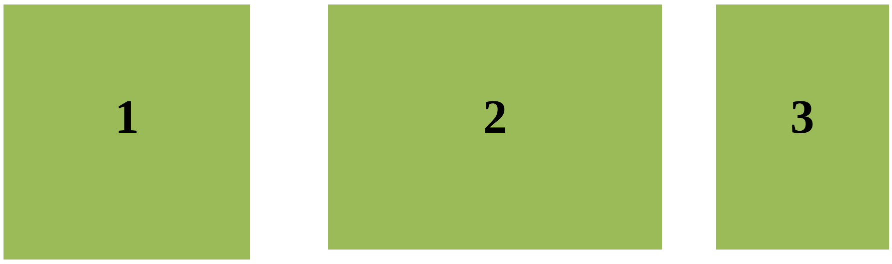
Primeira etapa:

1º Passo: A corta o bolo em três fatias que acha iguais.

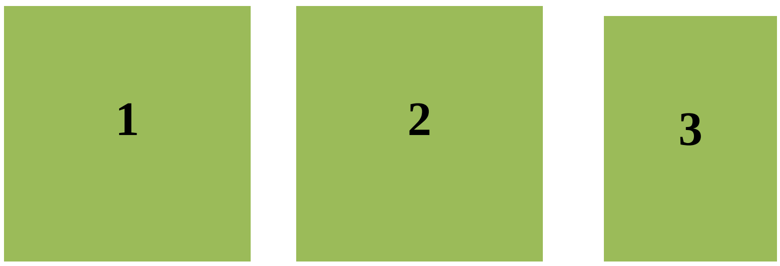


2º Passo:

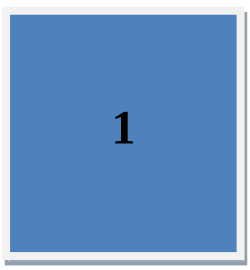
B, caso considere que há uma fatia maior do que as outras duas (2 por exemplo),



pode reduzi-la até ficar alinhada com a segunda maior (1 neste caso); desta forma garante que existem, pelo menos, duas fatias iguais para si melhores do que a terceira (alinha 1 com 2).



3º Passo: De seguida, põe as aparas de parte e passa as três fatias a C, que deverá escolher uma delas : suponhamos que escolhe 1.



4º Passo: O próximo a escolher será o B, o qual tem de ficar com a fatia por si reduzida (2), já que esta não foi escolhida por C. Caso C tivesse escolhido a fatia reduzida, B poderia escolher qualquer outra.

5º Passo: Por fim, A fica com a terceira fatia 1 (para ele, igual às outras duas).

Segunda etapa: ***divisão das aparas***

Na segunda etapa dividem-se as aparas entre os três jogadores.

A divisão das aparas é feita tendo em conta o jogador que ficou com a fatia reduzida na primeira etapa (C ou B):

Se foi B que ficou com a fatia reduzida, é C quem vai dividir as aparas em três partes iguais. A selecção das aparas vai ser feita pela ordem: B, A, C.

Se foi C a ficar com a fatia reduzida, é B quem vai fazer a divisão e a ordem de selecção será: C, A, B.

Chamemos então NR ao que não ficou com a fatia reduzida e RD ao que ficou com a fatia reduzida, para contemplar os dois casos.

1º Passo: NR divide as aparas em 3 partes que considera iguais.

2º Passo: RD escolhe a parte que considera maior.

3º Passo: A é o segundo a escolher.

4º Passo: NR fica com a restante.

Ou seja, quem ficou com a fatia reduzida será o primeiro a escolher entre as aparas. O que não ficou com a fatia reduzida vai dividir as aparas em três e vai ser o último a escolher. Isto entre B e C porque A nunca vai fazer o papel de divisor nesta segunda etapa.

Conclusão

Porque é que se diz que o método é livre de inveja?

Demonstremos, então, que o método é livre de inveja, ou seja, nenhum dos intervenientes tem motivos para invejar o outro porque cada um ficará sempre com a sensação que ficou com tanto ou mais que os outros.

A não inveja RD:

De facto, mesmo que RD ficasse com a totalidade das aparas, do ponto de vista de A, ficariam com partes iguais. Ora, acontece que RD fica com menos do que a totalidade das aparas e A com mais do que a fatia inicial, ou seja, do seu ponto de vista fica com mais do que RD.

A não inveja NR:

Como aquele que ficou a com a parte não reduzida ficara com 1/3 do bolo inicial, do ponto de vista do A, antes da partilha das aparas, tinham partes iguais para A. Escolhendo o A primeiro do que o NR na partilha das aparas, escolherá sempre a parte que lhe parecer de maior valor.
Portanto fica com a sensação de ter tanto ou mais do que NR.

RD não inveja A:

Se RD for o C fica com a sensação de que a partilha foi mais ou igualmente vantajosa para ele.
Isto acontece porque, inicialmente, ele tinha sido o primeiro a escolher (na primeira fase) e na divisão das aparas acontece o mesmo.

Se RD for o B, para ele a fatia que ele reduziu, e com que fica neste caso, será maior ou igual às restantes e portanto à de A. Como na divisão das aparas é o primeiro a escolher, ficará com uma parte das aparas que acha maior ou igual às restantes. Então, e do seu ponto de vista a soma das parcelas com que fica são maiores ou iguais às correspondentes de A.

NR não inveja A:

Se NR for B, então, na divisão inicial, ficou de certeza com uma das maiores partes (que considera iguais porque ele próprio as alinhou ou, se não alinhou, foi porque já as considerava iguais). Ele escolherá primeiro do que o A (é o segundo a escolher), garantindo que fica com uma parte que, para ele, é não inferior à de A. Por outro lado, na divisão das aparas, sendo ele a dividir, fá-lo-á em 3 partes que considera iguais. Logo, a escolha do A é-lhe indiferente.

Se NR for C, então, na divisão inicial, ficou com uma parte que considera não inferior à do A porque, ao escolher primeiro do que ele, terá a fatia que considera maior. Na divisão das aparas, mais uma vez, NR é que divide a parte restante do bolo em 3 partes que, para ele, são iguais. Assim sendo, independentemente da fatia que A escolher, visto que NR é o último a escolher, nunca o poderá invejar porque para ele as 3 partes são iguais.

RD não inveja NR:

Se RD for o C pensa que a parte reduzida é a maior das três porque foi ele que a escolheu. Por outro lado, ainda ganhará pelo menos 1/3 da parte que restou, pois é o primeiro a escolher as aparas. Então, não inveja NR.

Se RD for o B e, consequentemente, NR for C, do ponto de vista de RD, ele fica com uma parte igual ou superior ao NR (na divisão inicial): ele teve oportunidade de alinhar as duas que acha maiores quando reduziu e fica com uma reduzida. Na divisão das aparas é ele o primeiro a escolher, optando pela que lhe parecer maior. Assim fica melhor ou tão bem como NR.

NR não inveja RD:

No caso de NR ser C e RD, consequentemente B, também se constata que o método é livre de inveja. Isto acontece porque, na primeira fase, NR é o primeiro a escolher. Assim sendo, escolherá a fatia que lhe parecer maior. Por outro lado, na divisão das aparas, também ficará com uma parte que, do seu ponto de vista, será igual à de RD porque é ele que corta o que restou do bolo em 3 partes que considera iguais, não podendo por isso invejar qualquer uma que RD escolha.

Se NR for B, foi ele que reduziu, deixando as duas maiores partes, de acordo com o seu ponto de vista, iguais. Tendo ele sido o segundo a escolher, ficou de certeza com uma das duas que alinhou (se são as duas iguais, não inveja C que escolhe primeiro do que ele, deixando disponível para si uma das que considerou iguais). Relativamente à divisão da parte restante, é ele que corta em 3 partes que também são iguais do seu ponto de vista. Deste modo, qualquer uma lhe será indiferente, não podendo invejar o RD independentemente da parte que ele escolher.

(Trabalho realizado por Sofia Leite; Francisco Guimarães e Leonor Barroso)