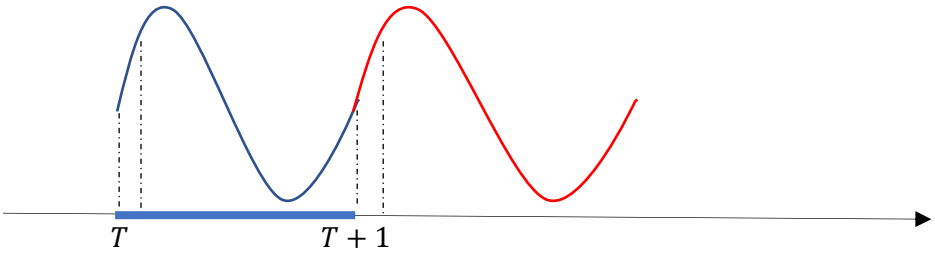
Problema 1: Resolução

Pois caro leitor/a o nosso coelho matou dois problemas de uma só cajadada… Conseguiu maneira de manter o compromisso com a velocidade média e de ganhar a corrida!

Começou por notar que, se representasse o tempo em horas no eixo Ox e a velocidade v em quilómetros por hora no eixo Oy, a velocidade média entre os instantes T e $T+1$ era dada pela área da região compreendida entre o gráfico de v, o eixo Ox, e as paralelas a Oy tiradas por T e $T+1$. Daqui reconheceu, de imediato, que se v fosse periódica de período 1, a velocidade média em intervalos de uma hora era contante. É que se deslocasse o intervalo $[T, T+1]$ ao longo de Ox a área referida mantinha-se constante pois o que se "perdia" em área num dos extremos "ganhava-se" no outro: veja na figura abaixo.



Procurou, então, uma destas funções, simples, que lhe permitisse recuperar, na última meia hora da corrida, a distância que tinha perdido para a girafa na primeira hora.

E ocorreu-lhe a seguinte função v:

$$v(t) = 21\ km/h \quad \text{se } 0 \leq t < 0{,}75 \qquad \text{e} \qquad v(t) = 16\ km/h \quad \text{se} \quad 0{,}75 \leq t \leq 1$$

A velocidade média referida seria: $v_m = 21 \times 0{,}75 + 16 \times 0{,}25 = 19{,}75\ km/h$

Ao fim de uma hora o nosso coelho teria a girafa 250 metros à sua frente. Mas ao fim de hora e meia, quando a girafa cortasse a meta percorrendo os 30 km, ele já teria percorrido 30, 25 km!

Desafio: Resolução

Nota: dedicada aos iniciados no Cálculo Integral

v é, obviamente, limitada (é uma velocidade) e, como o conjunto dos pontos de descontinuidade é finito em intervalos limitados, é integrável em qualquer intervalo limitado.

Sendo $v_m(T) = \int_T^{T+1} v(t)dt = c$ a sua derivada é nula.

Nos pontos $\boldsymbol{T}$ onde $\boldsymbol{v}$ é contínua em $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T+1}$ é: $\boldsymbol{v_m^{'}(T) = v(T+1) - v(T) = 0}$.

Esta condição é, pois, necessária para que $v_m(T)$ seja constante.

E é fácil reconhecer que também é suficiente: o conjunto dos pontos T tais que v não é contínua em T ou em $T+1$ é finito em intervalos limitados; a condição implica que entre pontos consecutivos deste conjunto $v_m(T)$ é constante. Como $v_m(T)$ é contínua as constantes têm de ser a mesma.