Problema 2: Resolução

Caro leitor/a repare que, para os casos de copos de 3 e 5 dl e de copos de 7 e 17 dl, podemos escrever as igualdades:

$$2 \times 3 = 1 + 5 \qquad \text{e} \qquad 5 \times 7 = 1 + 2 \times 17$$

Ora isto quer dizer que se formos enchendo um dos copos, nestes casos o de menor capacidade, e vertendo o conteúdo no outro, esvaziando este quando estiver cheio, acabamos por ficar com 1 dl no primeiro copo. No primeiro caso precisamos de verter duas vezes, no segundo cinco vezes.

Até aqui tudo fácil! Mas para o caso de as capacidades serem dadas por p e q primos, será que este processo ainda funciona?

Repare que se existirem A e B inteiros positivos tais que $A \times p = 1 + B \times q$, então vertendo A vezes o conteúdo do copo de capacidade p no copo de capacidade q conseguimos o tal 1 dl no primeiro copo.

Ora estes A e B existem mesmo!

Para se convencer imagine o conjunto dos inteiros da forma $A \times p + B \times q$, com A e B inteiros: vamos chamar-lhe X. Não é difícil reconhecer que para a prova da existência basta ver que 1 é um dos pontos de X, e isto quaisquer que sejam p e q: é o que vamos fazer.

Vamos recorrer a uma prova por Redução ao Absurdo (sobre este método pode gostar de ver a resolução do problema 3 de Maio de 2012 *aqui*) para mostrar que 1 é o menor número positivo de X .

Suponhamos, provisoriamente, que o menor número de X é $m > 1$. Então m é inferior a um dos primos uma vez que tanto p como q pertencem a X: admitamos que $m < q$.

Obviamente m não divide q, pois este é primo, logo, dividindo q por m, obtemos um resto r maior do que zero e inferior a m: $q = m \times s + r$.

Note agora que se adicionar ou subtrair pontos de X ainda obtém pontos de X e se multiplicar por um inteiro um ponto de X ainda obtém um ponto de X [1].

Então, como tanto q como $m \times s$ pertencem a X, $r = q - m \times s$ pertence a X e é inferior a m ao contrário do que tínhamos estabelecido o que demonstra a existência de inteiros A e B tais que $A \times p = 1 + B \times q$.

Mas será possível a igualdade com A e B positivos?

Repare que se $A \times p = 1 + B \times q$, A e B têm o mesmo sinal logo se forem ambos negativos basta trocar de membro na equação as respetivas parcelas para termos a igualdade pretendida com coeficientes de p e q positivos.

---

[1] Se não tiver conhecimentos de Álgebra Elementar, mas tiver curiosidade de saber o nome que, neste domínio da Matemática, se atribui a criaturas como X pode gostar de ler o Apêndice no fim!

Ainda uma Nota

O leitor/a apercebeu-se que o que foi decisivo na prova foi o facto de m não dividir um dos números p ou q.

Mas para que isso aconteça não é necessário exigir que ambos sejam primos: basta que não tenham divisores comuns para além da unidade, ou seja, que sejam primos entre si.

Em Matemática procura-se sempre provar os resultados com o mínimo de hipóteses. A introdução de hipóteses desnecessárias retira fecundidade ao resultado, deixa na sombra inúmeros casos em que ele se poderia aplicar.

Neste nosso caso ocultar-se-ia que o processo ainda funciona para copos com 8 e 9 dl, 25 e 49 dl, 125 e 147 dl, etc.

Para reconhecer que a condição de serem primos entre si é suficiente para que a nossa "receita" funcione basta na prova notar que m, como é maior do que 1, não pode dividir simultaneamente p e q.

E um desafio adicional

Se quiser, caro leitor/a, um pequeno desafio adicional tente provar que a condição é também necessária, ou seja, que se p e q não forem primos entre si não há maneira de conseguir o tal decilitro num dos copos.

É muito fácil e se nunca tentou demonstrar um resultado pode aqui facilmente encontrar uma oportunidade de experimentar o gosto que a prova proporciona.

Apêndice

O conjunto dos Números Inteiros, com a adição, diz-se que tem a estrutura de um Grupo: a designação indica que a operação é associativa, tem um elemento neutro, o zero que adicionado a qualquer outro não o altera, e todo o elemento tem um simétrico que adicionado com ele dá zero. Como neste caso a adição é comutativa o Grupo diz-se Comutativo.

Como a adição de elementos de X pertence a X costuma dizer-se que X é fechado para a adição: adicionando elementos de X não saímos do conjunto. Como além disso todo o elemento de X tem um simétrico, o seu produto por -1, pode ver que é um Grupo: diz-se um Subgrupo dos Inteiros.

Ora o conjunto dos Inteiros ainda tem uma outra operação: a multiplicação que é associativa e está ligada à adição pela propriedade distributiva (à direita e à esquerda), anelada à adição de quisermos, e que por isso se chama um Anel. Acontece que, como a multiplicação também tem um elemento unidade, o 1, e como é comutativa os Inteiros dizem-se um Anel Comutativo com Elemento Unidade.

Finalmente o leitor pode ver que X também é um Anel, um Sub-Anel dos Inteiros. Como o produto de um inteiro por um elemento de X ainda está em X este Sub-Anel diz-se um Ideal neste caso do Anel dos Inteiros.