Janeiro de 2018

Problema 2

i) Resolução

O número de casos possíveis, igualmente possíveis, é o número de formas diferentes de colocar as 24 pessoas em frente dos 24 cartões com o nome dos participantes que não é mais do que o número de permutações de 24 objetos, ou seja, 24 fatorial.

Vamos chamar Π_N ao número de maneiras de, numa sequência de N objetos, trocarmos as suas posições de forma que nenhum fique no mesmo lugar.

Então o número, de entre os casos possíveis, dos casos favoráveis ao nosso acontecimento é Π_{24}.

E a probabilidade P pedida é: $\dfrac{\Pi_{24}}{24!}$

Na resolução do problema 2 de outubro (*pode consultar aqui*) estabelecemos a seguinte fórmula de recorrência:

$$\Pi_N = (N-1)[\Pi_{N-2} + \Pi_{N-1}] \quad \text{para } N > 3$$

Assim, com algum trabalho, e sabendo que $\Pi_2 = 1$ e $\Pi_3 = 2$, o leitor poderá obter o valor de Π_{24}.

Nós não quisemos ter esse trabalho e, em vez disso, elaborámos um pequeno programa em Just Basic, com meia dúzia de linhas, que nos deu de imediato os seguintes valores:

Π_{24} = 228250211305338670494289

24! = 620448401733239439360000

P = 0.36787944

ii) Resolução 1

Vamos demonstrar a possibilidade recorrendo ao **Método de Redução ao Absurdo** (*sobre este método pode gostar de ver a resolução do nosso problema de Maio de 2012 aqui*).

Admitimos então, provisoriamente, que não é possível com uma rotação da mesa deixar duas pessoas no lugar correto.

Suponha caro leitor/a que atribuímos a cada uma das pessoas sentadas à volta da mesa, e que não estão na posição correta, um número que é o número de posições que ela precisa de saltar, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, para chegar ao lugar com o seu cartão.

Das vinte e três pessoas nestas condições não há duas com o mesmo número atribuído pois se houvesse uma rotação desse número de posições deixaria duas no lugar correto. Então esses números são todos distintos e como estão entre um e vinte e três e há vinte e três pessoas mal sentadas esses números são os números de um a vinte e três.

Agora imagine que resolvemos sentar as pessoas no lugar certo procedendo assim:

i) Fazemos o senhor X, mal sentado, saltar, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, o número de posições que o leva ao seu cartão e onde vamos encontrar um Y mal sentado (*porquê caro leitor/a?*).

ii) Fazemos o mesmo a Y: rodamos até encontrar o cartão de Y. E assim sucessivamente. Neste processo acabamos por chegar à posição inicial de X (*porquê caro leitor/a?)* e nessa altura já saltamos, no total do processo, um numero de posições que é múltiplo de 24.

iii) Se por acaso ainda houver alguém mal sentado escolhemos uma dessas pessoas e repetimos o processo e o número de saltos é outra vez um múltiplo de 24. E assim sucessivamente até sentar toda a gente corretamente.

Quando toda a gente estiver sentada o número total de saltos foi a soma dos números de 1 a 23 e, como vimos, é um múltiplo de 24.

Mas $1 + \cdots + 23 = \frac{23\times 24}{2} = 276$ que não é múltiplo de 24.

Resolução 2

Recorremos ainda ao **Método de Redução ao Absurdo**.

E vamos usar a adição modular com módulo 24 (ver NOTA no fim). Numeramos as posições das pessoas mal sentadas de 1 a 23 sequencialmente, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, a partir da pessoa que está no lugar correto.

E designamos por p_i a posição da pessoa *i* (*i = 1,…, 23*) e por r_i o número de posições que *i* tem de saltar, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, para chegar à posição c_i do seu cartão.

O conjunto dos p_i é igual ao conjunto dos r_i e igual ao conjunto dos c_i e não é mais do que {1, … ,23}.

Então para cada *i* é: $c_i = (p_i + r_i)\ mod 24$.

Designando por S a soma dos números de 1 a 23 e somando, membro a membro, as igualdades acima para *i* de 1 a 23 obtemos:

$$S + \dot{2}4 = 2 \times S$$

o que implicaria $S = \dot{2}4$ e já vimos que não é.

Desafio

Consegue mostrar, de forma agora muito simples, que se todos estiverem mal sentados também é possível rodar a mesa de forma a que pelo menos dois fiquem no lugar certo?

NOTA

Se a e b são inteiros positivos $(a + b)\ mod\ M$ é o resto da divisão de $a + b$ por M.