

Resolução

Desafio 1

Claro que não conseguiu encontrar o m e o n .

Cerca de 300 AC Euclides enunciou o que é conhecido como o **Teorema Fundamental da Aritmética**:

Todo o natural maior do que 1 pode escrever-se como produto de naturais primos menores ou iguais a ele. Essa representação é única a menos de rearranjos dos factores.

É por causa dessa unicidade de representação que 1 não é considerado primo.

E é por causa da possibilidade de construir todos os naturais superiores a 1 a partir dos primos que estes são chamados de “primos” ou “primeiros”: se quiser são os “building blocks” para os naturais.

Agora pense na decomposição de m e n em factores primos.

Na decomposição de $m \times n$ aparecem: os factores não comuns com o mesmo expoente e os comuns levantados à soma dos expoentes que têm na decomposição de m e n .

Ora os factores não comuns e os comuns com maior expoente aparecem na decomposição do menor múltiplo comum com o respectivo expoente e os comuns com menor expoente aparecem na decomposição do máximo divisor comum também com o respectivo expoente (*caso haja comuns com o mesmo expoente aparece um na decomposição de $\text{mdc}(m, n)$ e outro na decomposição de $\text{mmc}(m, n)$ sempre com o mesmo expoente*).

Assim:

$$m \times n = \text{mdc}(m, n) \times \text{mmc}(m, n)$$

e é por isto que não conseguiu encontrar os dois números nas condições pedidas.

Desafio 2

Resolução 1:

Suponha que o cheque era de x euros e y cêntimos.

Então, a constatação do leitor traduz-se na seguinte igualdade:

$$2 \times (100x + y) = 100y + x - 5$$

Ou:

$$-199x + 98y = 5$$

Esta é uma equação a duas incógnitas, linear pois os expoentes de x e y são 1, Diofantina (de [Diofanto de Alexandria](#)) pois procuramos soluções inteiras.

As equações Diofantinas da forma $ax+by = c$ são possíveis se e só se $\text{mdc}(a, b)$ divide c .

A condição necessária é óbvia pois $ax+by$ é múltiplo do $\text{mdc}(a, b)$.

A suficiência da condição pode ser estabelecida de forma análoga à que vamos usar para resolver a equação.

Começamos por usar o [Algoritmo de Euclides](#) para a determinação do máximo divisor comum de 199 e 98.

$$199 = 2 \times 98 + 3 \quad (\text{note que o } \text{mdc}(199, 98) \text{ divide } 3)$$

$$98 = 32 \times 3 + 2 \quad (\text{note que o } \text{mdc}(199, 98) \text{ divide } 2)$$

$$3 = 1 \times 2 + 1 \quad (\text{note que o } \text{mdc}(199, 98) \text{ divide } 1)$$

Então: $1 = \text{mdc}(199, 98)$

Vejamos agora como invertendo o processo obtemos a solução pretendida:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 1 \times 2 = 3 - 1 \times (98 - 32 \times 3) = 33 \times 3 - 98 = \\ &= 33 \times (199 - 2 \times 98) - 98 = 33 \times 199 - 67 \times 98 \end{aligned}$$

Finalmente: $-199 \times (-33) + 98 \times (-67) = 1$

e multiplicando por 5: $-199 \times (-165) + (-335) \times 98 = 5$

Temos então: $x_0 = -165, y_0 = -335$.

Mas note que ainda são soluções (*de facto é a solução geral*¹):

$$x = x_0 + k \times 98, y = y_0 + k \times 199$$

com k inteiro arbitrário: *estamos a adicionar e subtrair $199 \times 98 \times k$.*

A menor solução positiva obtém-se para $k = 2$: $x = 31, y = 63$

E é única pois para $k = 2$ vinha $y = 262$ que é um número não aceitável de cêntimos.

O cheque era pois de 31,63 €.

¹ A prova é muito simples e pode ser uma experiência motivadora para um iniciado/a

Resolução 2:

Supondo que o cheque era de x euros e y cêntimos o leitor recebeu y euros e x cêntimos logo x e y são menores do que 100.

Se $y < 50$ a constatação do leitor traduz-se no seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x = y \\ x - 5 = 2y \end{cases}$$

que não dá valor positivo para x .

Se $y \geq 50$ o sistema que traduz essa constatação é:

$$\begin{cases} 2y - 100 = x - 5 \\ 2x + 1 = y \end{cases}$$

cuja solução é $x=31$, $y=63$.

O cheque era pois de 31,63 €.