

Problema 3: Resolução

Problema 1:



Designemos por o , c , e , f a fração de ouro, cobre, estanho e ferro na peça.

Então:

$$o + c = \frac{2}{3} \quad o + e = \frac{3}{4} \quad o + f = \frac{3}{5} \quad o + c + e + f = 1$$

Donde: $2 \times o + (o + c + e + f) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}$ e $2 \times o = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - 1$

E agora o leitor facilmente calculará as quantidades pedidas.

Problema 2:



Vamos experimentar seguir o exemplo dos nossos antepassados navegadores e tentar ir mais além do objetivo fixado sem comprometer a viagem. Como Gil Eanes ir além do Bojador...

Repare, caro leitor, que a velocidade do navio que navega a velocidade constante, vamos designá-la por v_c , é a média aritmética das velocidades do outro nas viagens de ida e regresso a que chamaremos v_a e v_b .

$$\text{Isto é: } v_c = \frac{v_a + v_b}{2}.$$

Podemos tentar resolver o problema para quaisquer valores positivos de v_a e v_b e pesquisar se o resultado é independentemente destes valores.

É muito fácil calcular o tempo de viagem de cada um dos navios (*note que como ambos param cinco dias este dado não afeta o resultado*):

$$T_1 = \frac{2D}{v_c} = \frac{D}{\frac{v_a + v_b}{4}} \text{ e } T_2 = \frac{D}{v_a} + \frac{D}{v_b} = \frac{D}{\frac{v_a \times v_b}{v_a + v_b}}$$

onde D é a distância de Nova Iorque a Lisboa.

Como sabemos que a média geométrica de números positivos é menor ou igual à sua média aritmética, e igual se e só se os números forem iguais (**ver NOTA**), temos que:

$$\sqrt{v_a \times v_b} \leq \frac{v_a + v_b}{2} \Leftrightarrow v_a \times v_b \leq \left(\frac{v_a + v_b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{v_a \times v_b}{v_a + v_b} \leq \frac{v_a + v_b}{4}$$

Então $T_1 \leq T_2$: chega primeiro o navio que navega a velocidade constante independentemente dos valores v_a e v_b desde que v_c seja a sua média aritmética.

Será que Gil Eanes sabia isto? E se soubesse teria feito alguma diferença?

$$\text{NOTA: } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{a} \times \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

sendo que a igualdade se verifica se e só se $a = b$.