Problema 1: Resolução

***Introdução**: vamos referir-nos a um sistema de descontos de dez por cento em cartão análogo ao praticado pela FNAC.*

Caro leitor/a repare que se designar por g_N a quantia que gastou nas primeiras N primeiras compras e por g aquilo que gastou na compra de hoje a redução, por euro, que obtém para a totalidade das compras é de :

$$d_N = \frac{0{,}1\times g_N}{g_N+g} \qquad (1)$$

e o desconto em percentagem será de $d_N \times 100$.

Agora é fácil ver que se $g_N = 10$, comprando hoje um livro de 10 euros e da próxima vez uma impressora de 100 euros, se descontar os pontos hoje o desconto será de 5% mas se descontar os pontos na próxima compra já será inferior a 2 %[1].

No entanto, se alterar a ordem das compras, o desconto na primeira compra será inferior a 1% e na segunda superior a 9%.

Deixamos como desafio ao leitor mostrar que se os valores das compras forem iguais o desconto é sempre maior na segunda compra.

[1] Claro que no primeiro caso fica com 10 pontos em cartão e no segundo apenas com um mas estamos a avaliar apenas os descontos.

Também olhando para (1) facilmente reconhece que o desconto nunca atinge os 10% pois g é diferente de zero.

No entanto, mas apenas teoricamente, pode obter descontos tão próximos de 10% quanto quiser: se fizer compras indefinidamente então $g_N \to \infty$ e se não comprar coisas acima de um certo valor, ou seja se o conjunto dos valores de g for limitado, então $d_N \times 100 \to 10$.

Mas também, e apenas também em teoria, poderá obter descontos tão perto de zero quanto quiser: o desconto na segunda compra é $d_2 = \frac{0{,}1\times g_1}{g_1+g}$ e, quando $g \to \infty$, $d_2 \to 0$. Basta-lhe por isso, na segunda compra, comprar algo suficientemente caro!

E sobre a existência de limite para d_N?

Suponha que quando N é impar se comporta como um mãos largas e faz compras no valor de ${g_N}^2$ (e que tal é possível!...) e que quando é par cai em si e resolve gastar apenas 10 euros.

Então:

$d_I = \frac{0{,}1\times g_I}{g_I + {g_I}^2}$ nos dias ímpares e $d_P = \frac{0{,}1\times g_P}{g_P+10}$ nos dias pares

A primeira das sucessões tende para zero e a segunda para 0,1 logo d_N não tem limite.

Por isso d_N pode não ter limite.

Contudo, como vimos, nos casos em que o valor das compras é limitado, o que é o caso do mundo em que vivemos, $d_N \times 100 \to 10$.

Se comprar indefinidamente acaba por chegar arbitrariamente perto do tal desconto de 10% !