Problema 3: Resolução

Desafio 1

Suponha que na primeira semana a Catarina comeu *Tripas*, *Rojões*, *Polvo*, *Pescada, Francesinha, Bacalhau* e *Cabidela* nos seguintes restaurantes:







Cufra Aleixo D. Tonho Paparico Cafeina Rui Paula Papavinhos

O que queremos saber é de quantas formas diferentes podemos trocar estes petiscos, nesta sequência, de forma a que nenhum fique no mesmo lugar. Designando por Π_N o número formas distintas de trocar N elementos numa sequência de forma a que nenhum fique no mesmo lugar, o queremos é encontrar Π_7 .

Vamos, então, contar. Repare, as tripas da Cufra têm de ser comidas, em qualquer das posteriores semanas, num dos seis outros restaurantes.

Suponhamos que a opção é de comer as tripas no Aleixo; então pode acontecer que:

i) Os rojões sejam a opção na Cufra (há, por isso, uma troca) e neste caso os restantes pratos podem trocar arbitrariamente entre si desde que nenhum fique na mesma posição.
Há, portanto, Π_5 sequências diferentes neste caso.

ii) Os rojões não sejam a opção na Cufra e, nesse caso, o número de sequências diferentes com tripas no Aleixo é o número de formas diferentes de trocar os restantes seis pratos de forma a que nenhum fique no mesmo lugar.
Há, portanto, Π_6 sequências diferentes.

Como as tripas podem ser comidas em seis restaurantes diferentes temos:

$$\Pi_7 = 6[\Pi_5 + \Pi_6]$$

É fácil reconhecer que este resultado é independente do número de elementos na sequência.

Assim para N pratos, com $N > 4$, é: $\Pi_N = (N-1)[\Pi_{N-2} + \Pi_{N-1}]$

É uma fórmula de recorrência que nos permite conhecer qualquer Π_N se soubermos Π_2 e Π_3.

Mas: $\Pi_2 = 1$ e $\Pi_3 = 2$ como é óbvio por contagem direta.

Então: $\Pi_4 = 3[\Pi_2 + \Pi_3] = 9,\ \Pi_5 = 4[\Pi_3 + \Pi_4] = 44,\ \Pi_6 = 5[\Pi_4 + \Pi_5] = 265$

e finalmente: $\Pi_6 = 6[\Pi_5 + \Pi_6] = 1854$ semanas, mais de 93 anos!

Desafio 2

Agora a Catarina pode, em cada um dos sete restaurantes, comer qualquer dos pratos distintos do que aí comeu no primeiro dia.

O número de formas diferente é, pois, o número de arranjos, com repetição, de seis pratos sete a sete, ou seja, $6^7 = 1679616$ semanas mais de 32.300 anos!