Problema 3: Resolução

Apresentamos duas sugestões para a resolução do problema: uma elementar (não requer conhecimentos elaborados) e outra para a qual já são necessários conhecimentos de Álgebra Linear e Análise Real.

Trata-se apenas de esboços de solução para permitir aos interessados desbravar e completar os caminhos apontados.

Solução 1:

i) Comece por reconhecer que $Q'_n = Q_n \cup A_n$ é um conjunto convexo qualquer que seja o n natural: a prova por indução é facílima;

ii) Note que, como $P_{n+4} = \frac{P_n + P_{n+1}}{2}$, é válida para todo o n natural a igualdade:

$$P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} = P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} + 2P_{n+4}$$

e, portanto, este valor é: $P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = (3,4)$;

iii) Note que:

$$P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} = 7 \times (\frac{3}{7}\left(\frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}P_{n+1}\right) + \frac{4}{7}\left(\frac{2}{4}P_{n+2} + \frac{2}{4}P_{n+3}\right))$$

e, como os Q'_n são convexos o ponto $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ pertence a todos os A_n;

iv) Note que o diâmetro de cada Q'_n é o maior valor dos comprimentos dos lados e das diagonais;

v) Use as igualdades estabelecidas para mostrar que para todo o n natural é:

$$diam(Q'_{n+5}) \leq \frac{3}{4} diam(Q'_n)$$

e que, portanto, $diam(Q'_n) \longrightarrow 0$;

vi) Conclua que a intersecção dos A_n é o conjunto $\{(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})\}$.

Solução 2:

i) Note que se os valores α, β, γ são distintos existem quatro e só quatro pontos $X_0, X_1, X_2, X_3,$ que verificam as igualdades:

$$\begin{cases} X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = P_0 \\ X_0 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = P_1 \\ X_0 + \alpha^2 X_1 + \beta^2 X_2 + \gamma^2 X_3 = P_2 \\ X_0 + \alpha^3 X_1 + \beta^3 X_2 + \gamma^3 X_3 = P_3 \end{cases}$$

pois o determinante da matriz dos coeficientes é de *Vandermonde* logo não nulo;

ii) Note ainda que se escolher α, β, γ como as raízes diferentes de 1 da equação

$$x^4 - \frac{x+1}{2} = (x-1)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = 0$$

então:

a) *elas são distintas*

b) *são raízes de* $2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

c) *têm módulo menor do que 1*

d) *para todo o n natural é* $X_0 + \alpha^n X_1 + \beta^n X_2 + \gamma^n X_3 = P_n$ *pois são solução de:* $x^4 = \frac{x+1}{2}$

e) $P_n \longrightarrow X_0$ *o que resulta de c);*

iii) Note que disto resulta que $P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = 7X_0$ e, portanto,

$$X_0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right);$$

iv) Pode agora concluir que a intersecção dos A_n é o conjunto $\{\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\}$: para resolver este ponto apelamos ao seu engenho aconselhando todo o cuidado com a argumentação.