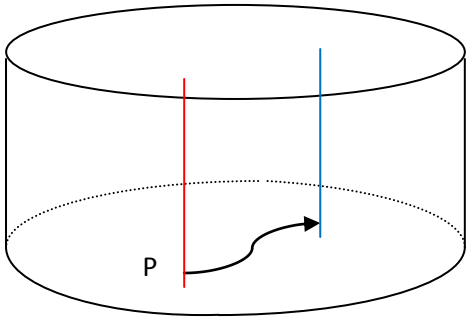
No último mês duplicamos o disco : mas sem espessura, reduzido a uma das bases.

Para obtermos a duplicação com espessura basta associar a cada ponto P do conjunto com que trabalhámos um segmento com extremo em P, paralelo ao eixo do disco e comprimento igual à espessura do mesmo (ver figura).



Se ao deslocarmos P ele arrastar consigo o segmento referido num movimento de translação obtemos a duplicação do disco.

Vamos então hoje tentar reduzir o disco para obter o exemplar para a Telma.

Para isso vamos fazer como o Gato das Sete Léguas: calçar umas botas que nos permitem saltar por cima da paisagem.

E a paisagem que fica por ver, e que é de facto extraordinária, é o célebre Paradoxo de Banach-Tarsky.

Banach e Tarsky conseguiram duplicar uma bola fechada partindo-a num conjunto finito de partes e executando sobre cada uma delas apenas rotações e translações (congruências).

Note que nós conseguimos duplicar o disco sem deformar as partes mas tivemos de parti-lo num conjunto infinito de partes.

Para quem quiser conhecer a construção deixamos, no fim, indicações bibliográficas.

O primeiro desafio que deixamos hoje é mostrar que, sabendo duplicar a bola, sabemos a partir de uma bola criar qualquer número finito de cópias.

Agora:

Uma definição:

Dois conjuntos A e B de pontos do espaço dizem-se ***equidecomponíveis*** se e só se for possível partir um deles (criar uma partição : ver o Problema de Fevereiro) num conjunto finito de partes e, executando sobre cada uma delas apenas operações que não a deformem (congruências), montar o outro.

Usaremos a notação A ~ B para indicar que A e B são equidecomponíveis e a notação A < B

para indicar que A é equidecomponível a uma parte de B.

Agora deixamos:

O segundo desafio deste mês: mostrar que se A e B são dois conjuntos de pontos do espaço ordinário, limitados e com interior não vazio, qualquer um deles é equidecomponível a uma parte do outro.

Sugerimos o seguinte procedimento :

i) Encontramos uma bola U que contenha A e uma bola V contida em B (possível pois A e B são limitados e o interior de B é não vazio);
ii) Construímos um número suficientemente grande de cópias de V (C1,…,Ck) para que com elas possamos cobrir U;
iii) Agora basta verificar que :

$A \subset$ U $\subset$ k cópias sobreponíveis de V < k cópias disjuntas de V ~ V $\subset$ B

E o mesmo acontece trocando A com B.

No próximo mês vamos ver que se A < B e B < A então A~B: trata-se do teorema de **Banach-Schroeder-Bernstein.**

Isto permitir-nos-á finalmente obter o disco para a Telma.

Bibliografia

The Pea and the Sun *Leonard M. Wapner*

The Banach-Tarsky Paradox (Capítulo 3) *Stan Wagon*