# O disco mais pequeno para a Telma

Suponhamos que A e B são conjuntos limitados e com interior não vazio e que qualquer deles é equidecomponível a uma parte de outro.
Pode então mostrar-se ( não vamos fazê-lo aqui ) que existem uma partição $P_A$ de A, uma partição $P_B$ de B e aplicações injectivas $f$:$P_A \to P_B$ e $g$: $P_B \to P_A$ tais que, para ambas, qualquer elemento do domínio tem uma imagem que resulta dele por uma congruência.
Para mostrar então que A e B são equidecomponíveis basta agora mostrar que, da existência de $f$ e $g$, resulta a existência de uma bijecção $h$ de A sobre B que conserva a propriedade acima referida. Isto não é mais do que o teorema de Schroeder-Bernstein de que deixamos aqui a prova com alguns passos a constituirem o problema deste mês.
Seja então $E_0$ o conjunto $P_A\setminus\ g(P_B)$.
Construimos agora por recorrência os conjuntos $E_n$: $E_{n+1} = g(f(E_n))$.
Ponhamos E=$\bigcup_{n\in\aleph} E_n$. Colocamos como desafio para esta semana mostrar que $h$:$P_A \to P_B$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in P_A\setminus E \end{cases}$$

é bijectiva.

## Problema 1

Mostre que h é injectiva.
*Sugestão*: Note que basta mostrar ( verifique ) que, se $x_1 \in E$ e $f(x_1) = g^{-1}(x_2))$ então $x_2 \in$ E. Repare que os pontos x de E são os pontos da forma: x= $g(f($ $g(...f(x_0)...)))$ onde $x_0 \in E_0$ e f aparece na expressão um número finito de vezes. As expressões em que o f não aparece correspondem aos pontos de $E_0$.

## Problema 2

Mostre que h é sobrejectiva.
*Sugestão*: Da nota anterior decorre que se y pertence a $P_B$ e não pertence a $f$(E) então $g$(y) pertence a $P_A\setminus$ E e, portanto, y=$h$($g$(y)).

## Conclusão

Assim podemos, a partir de uma cópia do disco do Snr. Silva, obter o disco para a Telma.