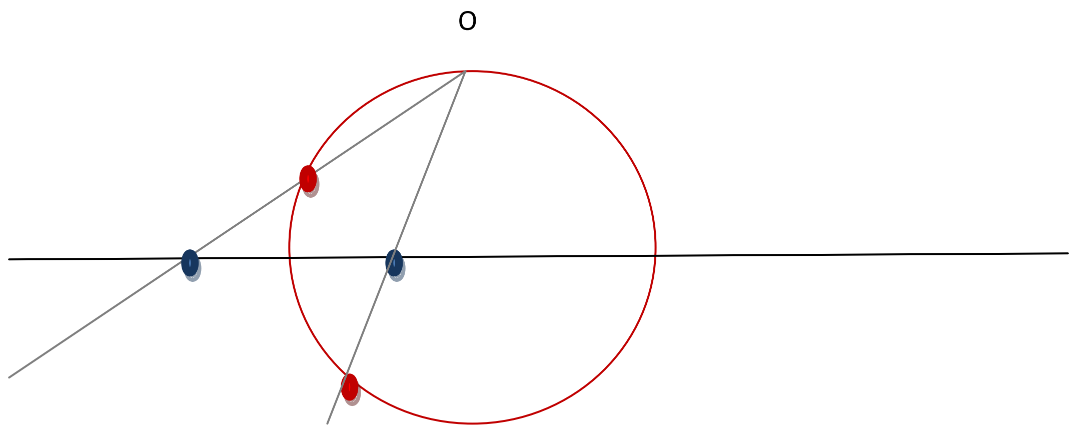
**i) V é não numerável**

1. **Começamos por mostrar que a circunferência de raio um é equicardinal à recta real.**

Deixamos duas sugestões:

**Sugestão 1:**

A figura abaixo sugere uma bijecção entre o conjunto K dos pontos da circunferência menos o seu “pólo norte” O e a recta real : os pontos a vermelho sobre a circunferência são transformados em pontos a azul sobre a recta.




Agora, se ler o texto sobre a cardinalidade dos reais, verá que, neste caso, acrescentar o ponto O a K não altera a cardinalidade logo a circunferência e a recta são equicardinais.

**Sugestão 2:**

Como vimos no texto sobre a Cardinalidade dos Reais que $[0,1[$ e $\mathfrak{R}$ são equicardinais basta provar que a circunferência de raio um e $[0,1[$são equicardinais.

Se imaginar a circunferência com centro na origem de um referencial ortonormado é fácil reconhecer que:

$$\alpha : [0,1[\longrightarrow S_1(0,0) \text{ com } \alpha(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

é bijectiva.

2. **Mostramos agora que a circunferência é a reunião de uma família numerável de conjuntos equicardinais a V.**

Como o conjunto dos racionais é numerável existe uma bijecção de $\aleph$ em Q : $q_n$.

Consideramos, para cada n natural o conjunto: $R_n = \{q_n + P : P \in V\}$

***Nota**: Este é o conjunto que resulta de "rodar" V em torno do centro da circunferência de um ângulo $q_n$ no sentido dos ponteiros do relógio se $q_n$ > 0 e no sentido contrário se $q_n$ < 0.*

a) A família dos conjuntos $(\mathfrak{R}_n)_{n\in\aleph}$ é uma partição da circunferência .

De facto, como vimos:

i) Todo o ponto da circunferência está numa classe de equivalência [P] onde P pertence a V logo é da forma P + q com q racional;

ii) Se $m \neq n$ então $\mathfrak{R}_m \cap \mathfrak{R}_n = \varnothing$ pois se $A \in \mathfrak{R}_m$ e $B \in \mathfrak{R}_n$ então $A = q_m + P_1$ e $B = q_n + P_2$ com $P_1, P_2 \in V$.
Se $P_1 = P_2 = P$ , $A, B \in [P]$ e , como $q_m \neq q_n$, $A \neq B$.
Se $P_1 \neq P_2$, A e B estão em classes distintas logo são diferentes.

b) Facilmente se reconhece que qualquer que seja o n natural $\mathfrak{R}_n$ é equicardinal a V.

3. **V é não numerável**

Se V fosse numerável a circunferência seria numerável (isso contradiz o que provamos em 1.) pois seria uma reunião numerável de conjuntos numeráveis e vimos no texto sobre o Aleph0 que uma tal reunião é numerável.

**ii) Quaisquer que sejam A e B, distintos, pertencentes à circunferência, podemos escolher V de forma a que esteja contido no arco de extremos A e B**

Basta mostrar que qualquer que seja o ponto P da circunferência há um ponto da classe de P no arco AB.

Suponhamos que P, A e B estão, por esta ordem e no sentido dos ponteiros do relógio[1], sobre a circunferência e designemos por $l_A$ o comprimento do arco PA e por $l_B$ o comprimento do arco PB.

Sabemos que entre $l_A$ e $l_B$ há infinitos racionais; seja q um deles. $P+q$ pertence ao arco AB.

Assim podemos, ao seleccionar os pontos de V, escolher, para cada classe, um ponto do arco AB.

**iii) V não é mensurável**

Sem definirmos medida de Lebesgue ( *se quiser saber o que é a medida de Lebesgue de um conjunto de pontos da circunferência veja o texto* ***Medida de Lebesgue*** ) de um subconjunto de pontos da circunferência não é difícil aceitar que essa medida deve satisfazer às condições seguintes:

C1. A medida de um conjunto é sempre maior ou iguala zero;

C2. A medida não se altera se rodarmos o conjunto em torno do centro da circunfe-rência;

C3. A medida da reunião de conjuntos disjuntos mensuráveis é igual à soma das medidas de cada um deles;

C4. A medida da circunferência de raio um é $2\pi$.

Designando a medida de um conjunto A por $\mu(A)$, se V tivesse medida então:

a) Se $\mu(V)=0$ seria $2\pi=\sum_{n\in\aleph}\mu(\mathfrak{R}_n)=\sum_{n\in\aleph}\mu(V)=0$;
b) Se $\mu(V)>0$ seria $2\pi=\sum_{n\in\aleph}\mu(\mathfrak{R}_n)=\sum_{n\in\aleph}\mu(V)=\infty$

[1] A prova seria análoga nas restantes hipóteses