Problema 2: Resolução

Ao lançarem as três moedas o número de resultados possíveis, e igualmente possíveis, são oito: os arranjos, com repetição, de cara ou coroa três a três.

Destes casos a Sara ganha naqueles em que ao João tiver saído cara e a ela pelo menos uma coroa, três casos, ou naqueles em que ao João tiver saído coroa e a ela duas coroas, um caso.

Ao todo quatro casos.

Então a probabilidade de a Sara ganhar continua a ser de ½.

E que havemos de pensar do João caro leitor/a? Ou é fraco a Matemática e se calhar bem-intencionado ou então é craque na disciplina e estava a brincar com a Sara, talvez a testar a argúcia dela.

Se, por acaso, tivesse proposto que lançassem ele duas moedas e a colega três a situação não melhorava.

Os casos possíveis seriam 2^5 e os casos em que a Sara ganhava podemos contá-los neste quadro:

N.º de coroas do João	N.º da casos em que a Sara ganha
0	$2^3 - 1 = 7$
1	$2 \times [\binom{3}{2} + 1] = 8$
2	1

O factor 2 na segunda linha refere-se às duas formas como o João pode obter uma coroa e, dentro do parênteses recto, estão todas as formas como a Sara pode obter mais de uma coroa.

São, portanto, ao todo 2^4 casos e a probabilidade continuaria a ser de ½.

E, de facto, se o João tivesse proposto lançar N moedas e a sara N+1 a probabilidade continuaria a ser ½.

Para ver isso vamos recorrer ao **Binómio de Newton** o tal que Álvaro de Campos dizia que era mais belo do que a Vénus de Milo mas que poucas pessoas conseguiam apreciar essa beleza.

$$(x+a)^N = \binom{N}{0} a^N + \binom{N}{1} a^{N-1}x + \cdots + \binom{N}{N-1} a x^{N-1} + \binom{N}{N} x^N$$ [1]

Se fizer *a* e *x* iguais a 1 obtém:

$$2^N = \binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{N-1} + \binom{N}{N}$$

[1] $\binom{N}{i}$ é o número de subconjuntos de i elementos de um conjunto com N elementos.
Para uma explicação sucinta das parcelas neste somatório pode ler a NOTA no fim.

Como $\binom{N}{i} = \binom{N}{N-i}$[2] então, no somatório acima, se N for ímpar o número de parcelas é par e a soma das N+1/2 primeiras parcelas é 2^{N-1} e se N for par este valor é a soma das N/2 primeiras parcelas mais metade da parcela do meio.

Ora no caso de serem lançadas 2N+1 moedas o número de casos possíveis é 2^{2N+1}.

Para contar os casos favoráveis voltamos a usar o quadro de há pouco:

N.º de coroas do João	**N.º da casos em que a Sara ganha**
0	$\binom{N}{0} \times [\binom{N+1}{1} + \cdots + \binom{N+1}{N+1}$
1	$\binom{N}{1} \times [\binom{N+1}{2} + \cdots + \binom{N+1}{N+1}]$
2	$\binom{N}{2} \times [\binom{N+1}{3} + \cdots + \binom{N+1}{N+1}]$
……	……
N-1	$\binom{N}{N-1} \times [\binom{N+1}{N} + \binom{N+1}{N+1}]$
N	$\binom{N}{N} \times \binom{N+1}{N+1}$

Veja agora o que se passa quando *N* é ímpar e, portanto, o número de linhas do quadro acima é par.

Se, ao adicionarmos todos os casos em que a Sara ganha, associarmos duas a duas as linhas onde a soma do número de coroas que o João obteve é *N*, encontramos, atendendo a que $\binom{N}{i} = \binom{N}{N-i}$, para a soma das linhas *i* e *N-i*:

$$\binom{N}{i} \times [\binom{N+1}{i+1} + \cdots + \binom{N+1}{N+1} + \binom{N+1}{N+1-i} + \cdots + \binom{N+1}{N} + \binom{N+1}{N+1}]$$

[2] Se associarmos a cada subconjunto com i elementos de um conjunto C com N elementos o seu complementar em C obtemos uma bijeção do conjunto dos subconjuntos com i elementos no conjunto subconjuntos com N-i elementos.

E, atendendo ainda à igualdade $\binom{N+1}{i} = \binom{N+1}{N+1-i}$, este resultado pode ser escrito da forma seguinte:

$$\binom{N}{i} \times \left[\binom{N+1}{i+1} + \cdots + \binom{N+1}{N+1} + \binom{N+1}{i} + \cdots + \binom{N+1}{1} + \binom{N+1}{0}\right]$$

Mas isto é: $\binom{N}{i} \times 2^{N+1}$.

Agora temos que somar todos estes valores com *i* a variar de *0* até *N/2*:

$$\left[\binom{N}{0} + \cdots + \binom{N}{\frac{N}{2}}\right] \times 2^{N+1}$$

Mas, como vimos, o somatório dentro dos parênteses recto é 2^{N-1}.

Então:

$$\left[\binom{N}{0} + \cdots + \binom{N}{\frac{N}{2}}\right] \times 2^{N+1} = 2^{2N}$$

e a probabilidade continuaria a ser ½.

Agora o leitor/a pode confirmar, para o caso de **N** par, que a probabilidade é ainda ½ procedendo de forma análoga.

NOTA

Binómio de Newton: A parcela $\binom{N}{i} a^{N-i} x^i$

Repare que $(x+a)^N = (x+a) \times (x+a) \ldots \times (x+a)$ tendo este produto *N* factores.

Para efectuar este produto tem de, em cada um dos factores, escolher um *x* ou um *a* e multiplicá-los; depois adiciona todos os produtos obtidos desta forma.

Se em i parênteses escolher *x* e nos restantes *a* obtém $a^{N-i}x^i$.

Ora tem $\binom{N}{i}$ formas diferentes de escolher os i parênteses onde decide optar por x: daí a parcela $\binom{N}{i} a^{N-i} x^i$.