Chocolates no Natal

Este é um problema muito simples que vamos aproveitar para tentar mostrar, a alunos muito jovens, como pode ser profícua a ligação entre ramos diferentes da Matemática: neste caso entre a Álgebra e a Geometria.

Vamos então designar por x, y e z as quantidades incógnitas[1], ou seja, respetivamente o número de caixas de cada um dos tipos das mais baratas para as mais caras.

Como o Pai Natal comprou dezasseis caixas podemos escrever esta igualdade:

$$x + y + z = 16$$

Dez das mais baratas custaram 40 € portanto 4 € cada uma.

Com estes 40 € podem comprar-se 4 das de preço intermédio portanto cada uma custa 10 €.

Sabemos que o Pai Natal gastou 120 € e podemos traduzir este facto pela igualdade:

$$4x + 10y + 20z = 120$$

Temos então um sistema de duas equações e três incógnitas:

---

[1] *Desconhecidas*

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ 4x + 10y + 20z = 120 \end{cases}$$

Surgem-nos agora as questões seguintes:

Existirá uma solução? E havendo será constituída por inteiros positivos?

Se a resposta a uma destas questões for negativa o problema foi mal posto: os dados fornecidos não traduzem o que se passou de facto quando a nossa convidada fez as compras.

E se existir uma solução será única? Se não for então temos dados insuficientes para descobrir o que o Pai Natal de facto comprou…

Vamos então tentar encontrar resposta para estas perguntas.

Se atribuirmos a z um valor qualquer fixo, z_0 *por exemplo, ficamos com o sistema seguinte:*

$$\begin{cases} x + y = 16 - z_0 \\ 4x + 10y = 120 - 20z_0 \end{cases}$$

E é aqui que entra a ligação à geometria.

Tudo começou, segundo consta, num colégio de padres jesuítas onde estudava um jovem que por causa da sua saúde débil tinha permissão por ficar na cama até às 11 horas.

Consta que uma manhã, deitado na cama e a olhar para o teto, viu uma mosca pousada. Foi então que teve esta brilhante ideia que veio revolucionar a Matemática a partir daí: reparou que para definir a sua posição só precisava de dois números: a distância do inseto a dois lados com um ponto comum. Então um ponto passava a ser um par de números e um passeio da mosca uma coleção de pares de números. Podíamos tratar problemas algébricos geometricamente e problemas geométricos algebricamente.

O génio de que estamos a falar é, nem mais nem menos, do que René Descartes.

E é com estas ideias que vamos tentar descortinar se o último sistema tem solução para alguns valores de z_0.

Ora tu já sabes que se a coleção de pontos que descreve o passeio da mosca é constituída por pontos que satisfazem uma igualdade da forma:

$$ax + by = c$$

então ela descreveu uma reta.

E mais, quando x é incrementado de uma unidade y vem incrementado de $-\frac{a}{b}$ se b não for nulo.

Este número traduz a inclinação da reta e chama-se o seu declive.

Ora qualquer que seja z_0 as duas retas têm declives diferentes (-1 a primeira e $-\frac{2}{5}$ a segunda) e, por isso, intersectam-se num único ponto, isto é, o sistema tem uma só solução para z = z_0.

Agora repara que os únicos valores que z_0 pode tomar são os inteiros de 1 a 14[2].

E voltamos ao tratamento algébrico. Não é difícil reconhecer que se substituímos a segunda equação pela sua soma com a primeira multiplicada por -4 a solução do sistema não se altera (tenta descobrir porquê).

Isso conduz-nos ao sistema equivalente[3]*:*

$$\begin{cases} x + y = 16 - z_0 \\ 6y = 56 - 16z_0 \end{cases}$$

Vamos então procurar soluções constituídas por inteiros positivos atribuindo valores a z_0:

$z_0 = 1 \longrightarrow y = \frac{50}{6}$ .... *Solução não inteira*

$z_0 = 2 \longrightarrow y = 4, x = 10$

$z_0 = 3 \longrightarrow y = \frac{4}{3}$ .... *Solução não inteira*

E é só pois a partir daqui só obtínhamos valores negativos para y!

Conclusão:

O Pai Natal comprou 10 caixas das mais baratas, 4 das de preço intermédio e 2 das mais caras.

---

[2] *Consegues saber porquê?*

[3] *Equivalente significa que tem a mesma solução…*