A Célebre Prova dos Nove

por José Veiga de Faria

No último artigo (***Critérios de Divisibilidade***) vimos como podemos usar a noção de congruência para estabelecer critérios de divisibilidade. Este mês vamos usar a mesma noção para justificar a célebre **prova dos Nove** para as operações aritméticas básicas.

1. A noção de resíduo positivo mínimo

Trabalhamos com números inteiros: positivos, negativos e o zero. Vamos começar por enunciar e provar o seguinte teorema que é muito simples.

Teorema 1 *Sendo m positivo:*

$$\forall_{a\in \mathbb{Z}} \qquad \exists_{r\in\{0,1,\ldots,m-1\}} : a \equiv r (mod\, m)$$

Um tal r é único.

Prova:
Existência: *Sendo k o maior dos inteiros não superior a* $\frac{a}{m}$*, é* $r = a - km$ *(pode fazer a prova que muito fácil).*
Unicidade: *É óbvia: dois resíduos diferentes teriam de ser congruentes para o módulo m, pela propriedade transitiva, o que é ímpossível pois diferem menos de m.*

Definição: Este r diz-se o resíduo positivo mínimo de a para o módulo m e passamos a escrever rpm(a) omitindo o módulo quando não houver lugar para dúvidas.

Deste teorema decorre de forma óbvia o seguinte:

Corolário 1

$$a \equiv b\,(mod\, m) \Leftrightarrow rpm(a) = rpm(b)$$

2. Cálculo do resíduo positivo mínimo para o módulo 9

Vamos ver como podemos calcular o resíduo positivo mínimo de *abcde*.
Sabemos do artigo anterior que $abcde \equiv a + b + c + d + e\,(mod\, 9)$.
Assim podemos ir somando os algarismos de *abcde* e, se num certo ponto obtivermos um valor superior a 9, somamos os seus algarismos (o que equivale a subtrair 9, daí o conhecido *noves fora*...). No fim de somarmos todos os algarismos (deitando os 9 fora) obtemos um número entre 0 e 8 congruente com *abcde* para o módulo 9, ou seja, o rpm (*abcde*) para o módulo 9.

3. Prova da adição

Suponhamos $a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 = s_1s_2s_3s_4$.
Sabemos que $a_1a_2a_3 \equiv rpm(a_1a_2a_3)\,(mod\,9)$, $b_1b_2b_3 \equiv rpm(b_1b_2b_3)\,(mod\,9)$ e portanto, como vimos em ***Critérios de Divisibilidade***, $s_1s_2s_3s_4 \equiv rpm(a_1a_2a_3) + rpm(b_1b_2b_3)\,(mod\,9)$.
Finalmente, e atendendo a que $s_1s_2s_3s_4 \equiv rpm(s_1s_2s_3s_4)\,(mod\,9)$ e à transitividade da congruência, $rpm(s_1s_2s_3s_4) \equiv rpm(a_1a_2a_3) + rpm(b_1b_2b_3)\,(mod\,9)$ ou, pelo Corolário 1 e para o módulo 9,

$$\mathbf{rpm}(s_1s_2s_3s_4) = \mathbf{rpm}(\mathbf{rpm}(a_1a_2a_3) + \mathbf{rpm}(b_1b_2b_3))$$

Esta é a conhecida **Prova dos Nove para a Adição**.
Claro que é uma condição necessária para o resultado estar correcto mas não suficiente: se fosse 9 + 9 = 0 !

4. Prova da Multiplição

Sendo A e B inteiros e $P = A \times B$ sabemos que $A \equiv rpm(A)\,(mod\,9)$, $B \equiv rpm(B)\,(mod\,9)$ e portanto, como vimos em ***Critérios de Divisibilidade***, $P \equiv rpm(A) \times rpm(B)\,(mod\,9)$.
Finalmente, e atendendo a que $P \equiv rpm(P)\,(mod\,9)$ e à transitividade da congruência, $rpm(P) \equiv rpm(A) \times rpm(B)\,(mod\,9)$ ou , pelo Corolário 1 e para o módulo 9,

$$\mathbf{rpm(P) = rpm(rpm(A) \times rpm(B))}$$

Esta é a conhecida **Prova dos Nove para a Multiplição**.
Como no caso anterior é uma condição necessária para o resultado estar correcto mas não suficiente: desafiamos o leitor a encontrar um contra-exemplo.

5. Prova da Divisão

Sendo A e B inteiros positivos e Q e R respectivamente o quociente e o resto da divisão inteira de A por B então $A = B \times Q + R$ e logo $A \equiv (rpm(B) \times rpm(Q) + rpm(R))(mod\,9)$.
Como $A \equiv rpm(A)(mod\,9)$ é $rpm(A) \equiv (rpm(B) \times rpm(Q) + rpm(R))(mod\,9)$ ou , pelo Corolário 1 e para o módulo 9,

$$\mathbf{rpm(A) = rpm(rpm(B) \times rpm(Q) + rpm(R))}$$

Esta é a conhecida **Prova dos Nove para a Divisão**.
Como no caso anterior é uma condição necessária para o resultado estar correcto mas não suficiente.

6. Prova da Potenciação Inteira

Sendo A e N inteiros positivos como $A \equiv rpm(A)(mod\,9)$ então $A^N \equiv rpm(A)^N(mod\,9)$. E como $A^N \equiv rpm(A^N)(mod\,9)$ então $rpm(A^N) \equiv rpm(A)^N(mod\,9)$ ou , pelo Corolário 1 e para o módulo 9,

$$\mathbf{rpm}(A^N) = \mathbf{rpm}(\mathbf{rpm}(A)^N)$$

Esta é a **Prova dos Nove para a Potenciação Inteira**.
Ainda aqui é uma condição necessária para o resultado estar correcto mas não suficiente.

NOTA E DESAFIO FINAIS

Usamos as congruências de módulo 9 por ser mais fácil calcular o resíduo positivo mínimo.
Mas, como facilmente reconhecerá, podíamos ter usado qualquer outro módulo.
Desafiamos o leitor a usar o módulo 11, para o qual também é fácil calcular o resíduo positivo mínimo, e obter a **Prova dos Onze** para as várias operações.
Queremos ainda referir que este artigo já foi aqui publicado há mais de dois anos. Como entretanto a audiência cresceu muito decidimos voltar a editá-lo.