Resolução 2:

1.ª questão:

Vamos calcular D da forma seguinte:

i) Quando o Domingos Paciência (DP) dá uma volta o Perelman (PL) andou um quinto do estádio: E / 5 ; e ficou na posição P1.

ii) Quando DP chega a P1 já PL está à frente: andou um quinto da distância percorrida pelo DP , ou seja, 1/5 E/5. Ficou na posição P2.

iii) Quando DP chega a P2 já PL está à frente: andou um quinto da distância percorrida pela DP , ou seja, $\frac{1}{5}\frac{E}{5^2}=\frac{1}{5^3}$. Ficou na posição P3.

Vemos agora que este processo se repete indefinidamente e que se quisermos calcular D temos de somar todas estas distâncias. Isso leva-nos a calcular a soma:

$$D=\frac{E}{5}+\frac{E}{5^2}+\frac{E}{5^3}+...$$

Trata-se de uma soma com uma infinidade de parcelas maiores do que zero !

Ora isso poderia levar-nos a pensar que D não era finito e que, portanto, o Domingos Paciência nunca ultrapassaria o Perelman.

Ele poderia mesmo pensar que se tratava de um passe de mágica matemático do Perelman para conseguir não ser ultrapassado.

Argumentos deste tipo aparecem nos célebres paradoxos propostos na Antiga Grécia por Zenão de Elea: este, em concreto, é o Paradoxo de Aquiles e da Tartaruga.

Acontece que a soma é finita e podemos mesmo calculá-la.

Basta pensarmos assim:

i) **Se fixarmos um n natural arbitrário D, se existir, vai ser um número superior à soma finita:**

$$D > \frac{E}{5} + \frac{E}{5^2} + \frac{E}{5^3} + ... + \frac{E}{5^n} = S_n$$

pois eliminámos da expressão uma infinidade de parcelas positivas

Esta soma é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{E}{5}\frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}} \qquad (1)$$

Trata-se de facto da soma de n+1 termos consecutivos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é –.

O número: $S = \frac{E}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}}$ está nessas condições como facilmente pode reconhecer comparando com (1).

Vemos já que a soma não é infinita.

O Domingos Paciência pode estar descansado: vai conseguir ultrapassar o Perelman.

ii) *Por outro lado*

D, se existir, deverá ser o número que pode ser aproximado, com erro arbitrariamente pequeno, por somas

ou, o que é a mesma coisa neste caso,

D, se existir, vai ser o menor dos números que são superiores a todos os

Acontece que S satisfaz essa condição.

De facto se

$$p < \frac{E}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}}$$

então

$$p < \frac{E}{5}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{5^n}}}{1-\frac{1}{5}} \quad \text{para} \quad 5^n > \frac{E}{E-4p}$$

iii) **Finalmente encontramos a distância que procurávamos:**

Então D= S , ou seja,

$$D = \frac{E}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{E}{4}$$

2.ª questão:

Basta na resolução anterior substituir 5 por N.

Obtemos :

$$D = \frac{E}{N}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{E}{N-1}$$