Para além do Aleph0

Poderá perguntar-se se todos os conjuntos infinitos "são como" os naturais isto é se têm a mesma cardinalidade.

A resposta é dada pelo Teorema de Cantor que enunciamos e demonstramos de seguida.

Teorema de Cantor:

Se X é um conjunto não existe uma aplicação sobrejectiva de X em $\wp(X)$ (conjunto das partes de X).

Demonstração: A afirmação é óbvia se $X = \varnothing$.
Se $X \neq \varnothing$, dada $\psi : X \longrightarrow \wp(X)$ o subconjunto C de X, $C = \{x \in X : x \notin \psi(x)\}$ não pertence ao contradomínio de ψ.

Uma relação de ordem nos cardinais

Vemos assim que, se $X \neq \varnothing$ existe uma aplicação biunívoca de X em $\wp(X)$ mas não o contrário. Diz-se que $card(X) < card(\wp(X))$.

Começando em ℵ, podemos escrever:

$$card(\aleph) < card(\wp(\aleph)) < card(\wp(\wp((\aleph))) < ...$$

Há infinitos cardinais transfinitos

Nesta cadeia podemos acrescentar sempre mais um cardinal.

Será que isto lhe relembra os axiomas de Peano? Há, de facto, pelo menos, tantos cardinais transfinitos (cardinais de conjuntos infinitos) como os naturais.

Vai-nos interessar agora a $card(\wp(\aleph))$ designada por cardinalidade do contínuo (havemos de ver que é a cardinalidade da recta real, do conjunto dos números reais) e representada pela letra $\mathcal{C}$.

A hipótese do contínuo

Pode perguntar-se se qualquer subconjunto não numerável dos reais é equicardinal a R, ou seja, tem a cardinalidade do contínuo. Isto é equivalente a perguntar se existe algum cardinal entre Aleph0 e $\mathcal{C}$.

Cantor conjecturou que tal cardinalidade não existe e essa conjectura ficou conhecida como a ***Hipótese do Contínuo (HC).***

Em 1963 Paul Cohen mostrou que dos Axiomas da Teoria dos Conjuntos não resulta nem HC nem a sua negação.